ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

К. Н. ВОЛКОВ,
В.Н. ЕМЕЛЬЯНОВ



ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

К. Н. ВОЛКОВ,
В.Н. ЕМЕЛЬЯНОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2008

УДК 532.517.4
ББК В22
В67

Волков К.Н., Емельянов В.Н. **Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с. — ISBN 978-5-9221-0920-8.

В книге дается систематическое изложение вопросов, связанных с применением метода моделирования крупных вихрей для расчетов турбулентных течений. Основное внимание уделяется замыканию фильтрованных уравнений Навье–Стокса и построению моделей подсеточной вязкости. Рассматриваются особенности численной реализации метода моделирования крупных вихрей и приводятся результаты расчетов внутренних и струйных турбулентных течений. Систематизация и обобщение данных позволяет сформулировать ряд проблем, решение которых имеет важное значение для развития данного направления в численном моделировании турбулентности, и выделить круг задач, для которых его применение представляется возможным и рациональным.

Для специалистов в области механики жидкости и газа, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Рецензенты
каф-ра гидроаэродинамики СПбГПУ
д-р физ.-мат. наук, проф. С. А. Исаев
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Корнев

ISBN 978-5-9221-0920-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2008
© К. Н. Волков, В. Н. Емельянов, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Основные обозначения 13
Введение 17
Глава 1. **Методы моделирования турбулентных течений** 55
1.1. Характеристики турбулентных течений 55
1.1.1. Масштабы турбулентного движения (55). 1.1.2. Спектральная плотность (56). 1.1.3. Корреляционные функции (61).
1.2. Основные и комбинированные подходы 62
1.3. Прямое численное моделирование 67
1.4. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса . . . 71
1.5. Моделирование крупных вихрей 72
1.6. Квазипрямое численное моделирование 79
1.7. Моделирование отсоединенных вихрей 81
1.8. Другие подходы 85
1.8.1. Решение нестационарных уравнений Рейнольдса (86). 1.8.2. Метод ограниченных численных масштабов (88). 1.8.3. Двухзонный подход (89). 1.8.4. Монотонное моделирование крупных вихрей (91). 1.8.5. Моделирование когерентных структур (92). 1.8.6. Решение уравнений Рейнольдса с частичным осреднением (93).
1.9. Оценки вычислительных ресурсов 94
Глава 2. **Фильтрация основных уравнений и проблема их замыкания** 97
2.1. Осреднение по Рейнольдсу 97
2.2. Осреднение по Фавру 99
2.3. Тройное и двойное разложение 100
2.4. Фильтрация 102
2.4.1. Неявная фильтрация (102). 2.4.2. Явная фильтрация (102). 2.4.3. Виды фильтров (104). 2.4.4. Ширина фильтра (106). 2.4.5. Проблемы, связанные с фильтрацией (107).
2.5. Фильтрованные уравнения переноса 109
2.5.1. Уравнения для мгновенных параметров (109). 2.5.2. Уравнения для фильтрованных параметров (112).
2.6. Проблема замыкания 113
2.7. Учет сжимаемости 115
2.7.1. Осреднение по Фавру (115). 2.7.2. Осреднение по Рейнольдсу (116). 2.7.3. Сравнение различных подходов (118).
2.8. Уравнения в консервативных переменных 118

Глава 3. **Моделирование слагаемых, связанных с подсеточным переносом** 121
3.1. Модели подсеточной вязкости и их классификация 121
3.2. Модели вихревой вязкости 125
3.2.1. Модель Смагоринского и ее модификации (125). 3.2.2. Модель структурной функции (131). 3.2.3. Модель WALE (133). 3.2.4. RNG-модель (134). 3.2.5. Динамические модели (135). 3.2.6. Дифференциальные модели (149). 3.2.7. Другие модели (151).
3.3. Модели подобных масштабов 153
3.4. Смешанные модели 155
3.4.1. Основные типы (155). 3.4.2. Динамические модификации (158). 3.4.3. Нелинейные модели (162). 3.4.4. Модели высокого порядка (165).
3.5. Спектральные модели 166
3.6. Модели с обращением свертки 168
3.6.1. Явная фильтрация (168). 3.6.2. Подсеточные напряжения (169). 3.6.3. Фильтрация уравнения переноса (170). 3.6.4. Метод явной фильтрации и реконструкции (172). 3.6.5. Метод приближенного обращения свертки (175). 3.6.6. Упрощенный подход (178).
3.7. Другие модели 179
3.8. Подсеточные потоки тепла и массы 180
3.9. Учет сжимаемости 181
3.9.1. Основные расчетные соотношения (181). 3.9.2. Уравнение изменения количества движения (183). 3.9.3. Уравнение изменения энергии (184).
3.10. Сравнение различных моделей подсеточного переноса 186

Глава 4. **Численная реализация, начальные и граничные условия** 193
4.1. Требования к вычислительной процедуре 193
4.1.1. Имеющиеся реализации (193). 4.1.2. Системное и функциональное наполнение (196). 4.1.3. Организация программного кода (211).
4.2. Основные уравнения 216
4.3. Метод конечных объемов 217
4.4. Расчет потоков через грани контрольного объема 220
4.4.1. Внутренние грани (220). 4.4.2. Граничные грани (221).
4.5. Невязкие потоки 222
4.5.1. Схема MUSCL (222). 4.5.2. Метод кусочно-параболической реконструкции (228).
4.6. Вязкие потоки 230
4.7. Дискретизация по времени 232
4.8. Решение системы разностных уравнений 235
4.8.1. Вычисление невязки (235). 4.8.2. Реализация многосеточного подхода (236). 4.8.3. Построение вложенных сеток (238).

4.9. Расчет вязкости и ширины фильтра 239
4.9.1. Модель турбулентности (239). 4.9.2. Комбинированный подход (241).
4.10. Формулировка начальных и граничных условий 243
4.10.1. Начальные условия (243). 4.10.2. Входная граница (243). 4.10.3. Выходная граница (249). 4.10.4. Стенка (250). 4.10.5. Другие условия (252).
4.11. Метод пристеночных функций 252
4.11.1. Структура пограничного слоя (252). 4.11.2. Закон стенки (253). 4.11.3. Реализация метода пристеночных функций (254). 4.11.4. Слабые граничные условия (256). 4.11.5. Двухслойные модели (258). 4.11.6. Другие подходы (261).
4.12. Средние параметры потока и спектр пульсаций. 261
4.12.1. Переход к средним параметрам (261). 4.12.2. Преобразование Фурье (262).

Глава 5. **Расчеты внутренних и струйных турбулентных течений** 264

5.1. Вычислительные ресурсы 264
5.2. Полностью развитое течение в канале 265
5.2.1. Начальные и граничные условия (265). 5.2.2. Параметры и сетка (266). 5.2.3. Результаты расчетов (266).
5.3. Турбулентное течение в канале со вдувом 269
5.3.1. Точные и приближенные решения (269). 5.3.2. Начальные и граничные условия (271). 5.3.3. Параметры и сетка (272). 5.3.4. Результаты расчетов (273).
5.4. Течение в свободном слое смешения 282
5.4.1. Приближенные решения (282). 5.4.2. Начальные и граничные условия (283). 5.4.3. Параметры и сетка (284). 5.4.4. Результаты расчетов (286).
5.5. Течение в затопленной круглой струе 290
5.5.1. Имеющиеся решения (290). 5.5.2. Начальные и граничные условия (292). 5.5.3. Параметры и сетка (294). 5.5.4. Результаты расчетов (294).
5.6. Течение и теплообмен в области взаимодействии круглой струи с преградой. 302
5.6.1. Взаимодействие струи с преградой (303). 5.6.2. Начальные и граничные условия (307). 5.6.3. Параметры и сетка (308). 5.6.4. Результаты расчетов (309).
5.7. Аэрооптические эффекты в турбулентном потоке 319
5.7.1. Влияние турбулентности на распространение света (319). 5.7.2. Дисперсия флуктуаций фазы (321). 5.7.3. Возмущение фазы волны (323). 5.7.4. Результаты расчетов (325).

Заключение 329
Список литературы 334
Предметный указатель 356

Предисловие

В исследованиях турбулентных течений задействовано большое число специалистов в различных областях науки и техники и расходуются весьма значительные средства, выделяемые правительственными и коммерческими организациями, а также некоммерческими и частными фондами.

Тематика, связанная с моделированием турбулентных течений методом крупных вихрей и смежными с ним подходами, интенсивно развивается как в университетах, так и в научных центрах, поддерживаемых промышленными корпорациями (например, Rolls–Royce plc, Airbus, Boeing, Volvo Aero Corporation, Ford Motor Company) и фирмами-разработчиками коммерческих вычислительных пакетов, предназначенных для решения задач газовой динамики и теплообмена (например, Fluent Inc, Ansys Inc, CD-adapco). Исследования в данной области финансируются грантами национальных организаций и фондов, в частности, Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) в России, Royal Society, Engineering and Physical Sciences Research Council (EPSRC) в Великобритании, National Research Council (CSIC) в Испании, National Research Council (CNR) в Италии, National Council for Scientific Research (CNRS) во Франции, National Science Foundation (NSF) в США, Japan Science and Technology Agency (JST) в Японии, а также организациями и фондами других стран. Исследования находят также поддержку на международном уровне. Соответствующие исследования и разработки поддерживаются, в частности, Рамочными программами Европейского Союза по научным исследованиям и технологическим разработкам (EU Framework Programme for Research and Technological Development) и Европейским космическим агенством (European Space Agency).

Среди зарубежных университетов и научных центров, внесших существенный вклад в теорию и практику турбулентности и ее численное моделирование, следует отметить Von Karman Institute for Fluid Dynamics (Бельгия), Imperial College (Лондон, Великобритания), University of Cambridge (Кэмбридж, Великобритания), University of Manchester (Манчестер, Великобритания), University of Tolouse (Тулуза, Франция), Center for Modeling of Turbulence and Transition (Кливленд, США), Center for Turbulence Research (Стэнфорд, США), National Center for Atmospheric Research (Колорадо, США), Massachusetts Institute of Technology (Кэмбридж, США),

Sandia National Laboratory (Калифорния, США), Chalmers University of Technology (Гетеборг, Швеция), Tokyo Institute of Technology (Токио, Япония) а также национальные аэрокосмические центры ONERA во Франции, DLR в Германии, CIRA в Италии, NASA в США. Интенсивные многолетние исследования за рубежом ведутся M. Breuer, L. Davidson, J.W. Deardorff, J.H. Ferziger, C. Fureby, M. Germano, S. Ghosal, A.D. Gosman, M. Lesieur, P. Moin, U. Piomelli, W. Rodi, P. Sagaut, P.R. Spalart, P.G. Tucker и многими другими исследователями.

Англоязычная библиография по современным методам моделирования турбулентных течений, включая метод моделирования крупных вихрей и смежные подходы (прямое численное моделирование, моделирование отсоединенных вихрей и другие), насчитывает несколько тысяч журнальных статей и десятки монографий. В то же время, русскоязычная библиография по данной проблеме существенно уже.

В Российской Федерации работают специалисты и научные школы, получившие мировое признание в области моделирования турбулентных течений. Существенный вклад в моделирование турбулентных течений внесли научные группы, работающие в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете (работы М.Х. Стрельца и Е.М. Смирнова и сотрудников кафедры гидроаэродинамики), Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова (работы А.Н. Секундова, Д.А. Любимова), Институте теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (работы Б.Б. Илюшина, Д.В. Красинского), Институте прикладной механики УрО РАН (работы А.М. Липанова, Ю.Ф. Кисарова), Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (работы М.И. Иванова, А.Н. Кудрявцева), Вычислительном центре РАН им. А.А. Дородницына (работы А.И. Толстых, В.Е. Яницкого). Разумеется, приведенный список не является полным и может быть продолжен. Данная тематика входит в число приоритетных направлений научных исследований многих российских научных центров и университетов. Полученные результаты были опубликованы либо в труднодоступных изданиях (часть исследований выполнялась по заказу промышленных корпораций и была представлена лишь в соответствующих отчетных материалах, а потому не доступна широкой научной общественности), либо посвящены исследованию отдельных классов течений, а также обсуждению частных, порой весьма обособленных друг от друга, вопросов численной реализации.

Отечественные монографии, посвященные оценке состояния и уровня развития современных методов моделирования турбулентных течений или ограничены рассмотрением ряда частных вопросов или отсутствуют. Среди имеющихся трудов следует отметить книги О.М. Бело-

церковского [1]), А. М. Липанова, Ю. Ф. Кисарова, И. Г. Ключникова [2]), И. А. Белова, С. А. Исаева [3]), О. М. Белоцерковского, А. М. Опарина, В. М. Чечеткина [4]). В основном, в перечисленных изданиях рассматриваются вопросы, связанные с реализацией методов прямого и квазипрямого численного моделирования турбулентных течений и их применения на многопроцессорных вычислительных системах.

К перечисленным изданиям следует добавить монографии, посвященные физическому и численному исследованию крупномасштабных (когерентных) вихревых структур в турбулентном потоке. В этих книгах метод моделирования крупных вихрей непосредственно не затрагивается, но при этом результаты, изложенные в них, имеют важное значение для обоснования современных методов моделирования турбулентности, понимания ее природы и механизмов, а также верификации численных расчетов. Среди них следует отметить книги А. С. Гиневского, Е. В. Власова, Р. К. Каравосова [5]), Ю. И. Хлопкова, В. А. Жарова, С. Л. Горелова [6]).

Более представительную группу составляют доклады, сделанные на национальных и международных конференциях. Среди них следует, в частности, отметить лекции, прочитанные М. Х. Стрельцом и Е. М. Смирновым на школах-семинарах молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева (Санкт-Петербург, 2001; Калуга, 2005).

Ряд вопросов, связанных с расчетами турбулентных течений различного класса при помощи современных методов моделирования турбулентности (DNS, LES и DES), рассматривается в кандидатских диссертациях А. Г. Абрамова, С. А. Якубова (научный руководитель Е. М. Смирнов), П. Е. Смирнова (научный руководитель В. В. Рис), Д. В. Денисихиной (научный руководитель М. Х. Стрелец), защищенных в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете в 2004–2006 гг., кандидатской диссертации В. Н. Лапина (научный руководитель С. Г. Черный) и докторской диссертации С. Г. Чер-

---

[1]) *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.

[2]) *Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г.* Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.

[3]) *Белов И. А., Исаев С. А.* Моделирование турбулентных течений. СПб: Изд-во БГТУ, 2001.

[4]) *Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М.* Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002.

[5]) *Гиневский А. С., Власов Е. В., Каравосов Р. К.* Акустическое управление турбулентными струями. М.: Физматлит, 2001.

[6]) *Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л.* Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: Изд-во МФТИ, 2002.

ного, защищенных в 2006 г. в Институте вычислительных технологий СО РАН.

В то время как вопросам замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, исследованию и обоснованию полуэмпирических моделей турбулентности, а также их верификации уделяется довольно большое внимание в литературе [1]), имеется существенный пробел в русскоязычной библиографии, посвященной вопросам моделирования турбулентных потоков на основе метода крупных вихрей и смежных с ним подходов. Данная книга призвана восполнить этот пробел.

Для выявления исторических тенденций, трудностей и спорных мест в книгу включены результаты, подводящие итоги определенных этапов исследований в данной области. Собраны результаты длительных исследований по разработке подсеточных моделей различного класса и расчетам турбулентных течений при помощи метода крупных вихрей, а также вопросы, связанные с дискретизацией и численным решением нестационарных уравнений Навье–Стокса на неструктурированных сетках.

Разработки и результаты, приведенные в монографии, были получены авторами в Балтийском государственном техническом университете «Военмех» им. Д. Ф. Устинова (Санкт-Петербург), университете Центрального Ланкашира (University of Central Lancashire, Preston, UK) и университете Суррея (University of Surrey, Guildford, UK). Часть результатов, представленных в монографии, вошла в диссертацию К. Н. Волкова на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, защищенную в Санкт-Петербургском государственном университете в 2006 г.

Вычисления производились на современных параллельных вычислительных системах в режиме удаленного терминала. Кластеры, выпускаемые компаниями Streamline Computing Ltd и Cluster Vision Ltd, расположены в университете Суррея. Суперкомпьютерный центр находится в Великобритании (Daresbury Laboratory, Warrington, UK). Система поддерживается HPCx-консорциумом (UoE HPCx Ltd), в который входят университет Эдинбурга (University of Edinburgh, UK), Центральная лаборатория совета по научным исследованиям CLRC (Central Laboratory for Research Councils, UK) и компания IBM. Учебно-методическую поддержку осуществляет параллельный компьютерный центр университета Эдинбурга EPCC (Edinburgh Parallel Computer Center, EPCC).

---

[1]) Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю. А. Быстров, С. А. Исаев, Н. А. Кудрявцев, А. И. Леонтьев. СПб: Судостроение, 2005.

Книга разбита на главы, разделы и подразделы. Формулы, рисунки и таблицы нумеруются внутри каждой главы (указывается номер главы и порядковый номер).

По возможности в книге используются общепринятые обозначения. В некоторых случаях в разных частях книги используется один и тот же символ для обозначения различных величин, и по ряду причин оказывается удобным обозначить одну и ту же величину в разных главах и разделах по-разному. Обозначения, используемые в этих случаях, особо оговариваются в тексте.

Во введении излагается краткая история развития исследований турбулентности и основные достижения. Дается классификация и краткая характеристика полуэмпирических моделей турбулентности, обсуждаются их достоинства и недостатки.

В гл. 1 обсуждаются достоинства и недостатки различных методов моделирования турбулентных течений (прямое численное моделирование, решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, моделирование крупных вихрей, моделирование отсоединенных вихрей, квазипрямое численное моделирование и ряд других комбинированных подходов), а также проблемы, возникающие при их численной реализации.

В гл. 2 обсуждаются вопросы, связанные с осреднением уравнений Навье–Стокса по Рейнольдсу и Фавру, а также с явной и неявной фильтрацией уравнений Навье–Стокса. Приводятся фильтрованные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа и формулируется проблема их замыкания.

В гл. 3 рассматриваются вопросы моделирования слагаемых, связанных с подсеточным переносом импульса, тепла и массы. Приводится классификация подсеточных моделей и выделяются их основные группы (модели вихревой вязкости, модели подобных масштабов, смешанные модели, спектральные модели, модели с обращением свертки и ряд других). Обсуждаются достоинства и недостатки различных подсеточных моделей.

В гл. 4 сравниваются требования к вычислительной процедуре и ресурсы, необходимые для проведения численных расчетов на основе различных подходов к описанию турбулентных течений. Разрабатывается подход к дискретизации уравнений Навье–Стокса на структурированных и неструктурированных сетках в рамках метода конечных объемов, а также конечно-разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространству.

В гл. 5 приводятся результаты расчетов внутренних и струйных турбулентных течений (течение в канале с твердыми стенками, течение в канале с распределенным вдувом, течение в слое смешения, течение в изотермической и неизотермической струе, течение в области взаимодействия потока с преградой, течения в пограничном слое и слое смешения и связанные с ними аэрооптические эффекты в турбулентном

потоке), сравнивается точность и эффективность различных подсеточных моделей.

В заключении формулируются основные выводы и некоторые направления дальнейших исследований. Систематизация и обобщение полученных результатов позволяет сформулировать ряд проблем, решение которых имеет важное значение для развития метода моделирования крупных вихрей, и выделить круг задач, для которых его применение представляется возможным и рациональным.

Список литературы дается в алфавитном порядке (сначала русскоязычные издания, затем публикации, вышедшие за рубежом на английском языке). При ссылках на литературу, приведенную в библиографическом списке в конце книги, в тексте указывается порядковый номер в квадратных скобках (за исключением введения, где ссылка на источник дается в виде сноски).

В некоторых случаях ссылки на оригинальные работы исторического плана заменяются ссылками на более поздние издания обобщающего характера. В этих изданиях, помимо ссылок на оригинал, приводятся более или менее подробные комментарии к цитируемой работе.

Предметный указатель в конце книги призван облегчить читателю поиск нужной информации и ориентацию в тексте.

Авторы надеются, что собранный материал поможет читателю уверенно ориентироваться в многочисленных публикациях на данную тему, а приведенные результаты будут способствовать развитию исследований в этой области.

Авторы выражают глубокую признательность директору Центра по исследованиям пожаров и взрывов (Center for Research in Fire and Explosion Studies, University of Central Lancashire, Preston, UK) Г. М. Махвиладзе, который подвинул авторов на исследования в данной области, заведующему кафедры гидроаэромеханики Санкт-Петербургского государственного университета С. К. Матвееву, прочитавшему предварительный вариант книги и сделавшему ряд ценных замечаний, С. А. Исаеву, Н. В. Корневу, Е. М. Смирнову, высказавшим важные для авторов мнения по содержанию книги, директору Центра по исследованиям течений жидкости университета Суррея (Fluids Research Center, University of Surrey, Guildford, UK) J. Chew и корпорации Роллс–Ройс (Rolls-Royce plc, Derby, UK) за предоставленные возможности для проведения численных расчетов и поддержку исследований, А. Ю. Снегиреву, сотрудникам кафедры плазмогазодинамики и теплотехники Балтийского государственного технического университета за постоянное внимание к работе, всем коллегам, дискуссии с которыми способствовали прояснению вопросов, рассмотренных в монографии, а также многим другим, чьи имена не позволяет привести ограниченный объем книги, но без помощи и поддержки которых издание книги оказалось бы невозможным. Особую благодарность авторы выражают академику РАН А. М. Липанову за поддержку и внимание к данной работе. Стимулирующее влияние на издание книги оказали многочис-

ленные обсуждения на конференциях, семинарах и рабочих встречах, а также беседы с нашими коллегами в университете и других организациях.

Авторы будут благодарны за замечания и уточнения, которые можно присылать на адрес кафедры плазмогазодинамики и теплотехники Балтийского государственного технического университета (190 000 Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д. 1) или на электронные адреса k.volkov@surrey.ac.uk, vlademelyanov@mail.com.

К. Н. Волков
В. Н. Емельянов

Основные обозначения

Система координат	Координаты	Компоненты скорости
Декартовая	x, y, z или x_1, x_2, x_3	v_x, v_y, v_z или u, v, w
Полярная	r, θ	v_r, v_θ или u, v
Цилиндрическая	x, r, θ	v_x, v_r, v_θ или u, v, w

Латинские буквы

a — скорость звука

A — постоянная

c, C — постоянные

c_p — теплоемкость при постоянном давлении

C_f — коэффициент трения

D_2 — структурная функция 2-го порядка

e — полная энергия

E — спектральная плотность

f — функция

F — вектор потока

g — ядро фильтра

$\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения

h — энтальпия

H — функция Хевисайда

i — комплексная единица

k — кинетическая энергия турбулентности

l — масштаб турбулентности

L — линейный масштаб

M — молярная масса

$\mathbf{n}$ — вектор нормали

N — число узлов сетки

p — давление

q — плотность теплового потока

Q — вектор консервативных переменных

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор

R — невязка

s — тензор скоростей деформаций

S — источниковый член

t — время

T — температура

u — внутренняя энергия

U — масштаб скорости

$\mathbf{v}$ — вектор скорости

V — объем

y — расстояние от центра контрольного объема до стенки

Y — массовая концентрация

Греческие буквы

γ — отношение удельных теплоемкостей

Γ — циркуляция

δ — толщина пограничного слоя или зоны смешения

Δ — ширина фильтра

ε — скорость диссипации кинетической энергии

κ — волновое число

$\boldsymbol{\kappa}$ — волновой вектор

$\varkappa$ — постоянная Кармана

λ — теплопроводность

μ — динамическая вязкость

ν — кинематическая вязкость

ρ — плотность

τ — тензор вязких напряжений

$\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной

ϕ — функция-переключатель

χ — релаксационный параметр

ω — угловая скорость

$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ — вектор вихря

Числа подобия

M — число Маха

Nu — число Нуссельта

Pr — число Прандтля

Re — число Рейнольдса

Ri — число Ричардсона

Sc — число Шмидта
Sh — число Струхаля

Нижние индексы

b — граница расчетной области
eff — эффективный
i, j — тензорные индексы
k — колмогоровский
sgs — подсеточный
t — турбулентный
w — стенка
0 — точка торможения
$*$ — критический

Верхние индексы

n — шаг по времени
$+$ — пристеночные параметры
$*$ — след тензора

Осреднение и фильтрация

$\overline{}$ — осреднение по Рейнольдсу
$\widetilde{}$ — фильтрация с сеточным фильтром
$\widehat{}$ — фильтрация с тестовым фильтром
$\langle\ \rangle$ — осреднение по ансамблю реализаций

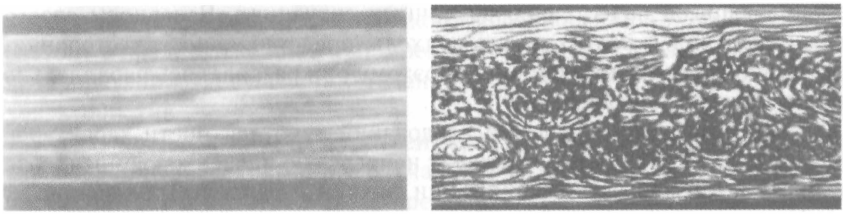
Сокращения

ADM — Approximate Deconvolution Method
CAA — Computational Aero Acoustic
CES — Coherent Eddy Simulation
CFD — Computational Fluid Dynamics
CSC — Coherent Structure Capturing
DES — Detached Eddy Simulation
DNS — Direct Numerical Simulation
ECM — Edge Collapse Method
EVM — Eddy Viscosity Model
HPF — High-Pass Filtered
LES — Large Eddy Simulation

LNS — Limited Numerical Scales
MILES — Monotonically Integrated Large Eddy Simulation
PANS — Partially Averaged Navier–Stokes
PDF — Probability Density Function
PDNS — Pseudo Direct Numerical Simulation
QDNS — Quasi Direct Numerical Simulation
RANS — Reynolds-Averaged Navier–Stokes
RNG — Renormalization Group
RSM — Reynolds Stress Model
SA — Spalart–Allmaras model
SAS — Self-Adaptive Simulation
SDS — Semi-Deterministic Simulation
SFS — Sub-Filter Scale
SGS — Sub-Grid Scale
SST — Shear Stress. Transport
TRRANS — Turbulence Resolving RANS
URANS — Unsteady Reynolds-Averaged Navier–Stokes
VLES — Very Large Eddy Simulation
VPA — Velocity Partitioning Approach
VRM — Variational Multi-Scale

Введение

Течения жидкостей и газов, наблюдаемые в природных условиях и технических устройствах, делятся на два принципиально различающихся типа: ламинарные (спокойные, плавные, регулярные) и турбулентные (хаотические, неупорядоченные во времени и в пространстве).



Ламинарное (слева) и турбулентное (справа) течения

Ламинарные течения являются, скорее, исключением, а не правилом. Их отличают малые размеры и большая вязкость среды. Типичными примерами ламинарных течений служат обтекание сферы низкоскоростным потоком и течение смазочного масла в подшипнике.

Большинство движений жидкостей, газов и плазмы, встречающихся в природе и технике, являются турбулентными. Течения воды в реках и каналах, течения нефти и природного газа в трубопроводах, течения в проточных частях турбомашин и газовых трактах ракетных двигателей, следы за судами и летательными аппаратами являются турбулентными. Турбулентность оказывает влияние на процессы горения, смешения и переноса частиц дисперсной примеси. Среди течений с геофизическими масштабами следует отметить течения воздуха в атмосферном пограничном слое, струйные течения в верхней тропосфере, течения воды ниже поверхности океана. Облака в атмосфере, облака межзвездного газа, газовые туманности также находятся в состоянии турбулентного движения.

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и достигнутые успехи в области построения численных методов и разработке соответствующего математического обеспечения, проблема численного моделирования турбулентности остается одной из наиболее сложных и важных проблем механики жидкости и газа. В отличие от ламинарных течений, расчет которых стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик турбулентных течений по ряду причин (трехмерный характер течения, стохастическая природа и широкий пространственно-временной спектр масштабов) остается, скорее, искусством, чем строгой наукой.

Исследования турбулентности включают в себя весьма широкую область разнообразных физических приложений, а их история на-

считывает более столетия. Столь необычно большой срок от первых наблюдений этого явления до его теоретического осмысления связан со сложностью рассматриваемой проблемы. До сих пор не существует общего подхода к описанию турбулентного движения жидкости. В течение длительного периода были развиты различные подходы (статистический, структурный и динамический) для описания феномена турбулентности [1]). Результаты, полученные в рамках каждого подхода, зачастую относились к разным задачам и отвечали на вопросы, возникающие в качественно различных ситуациях. В периоды своего возникновения и развития эти подходы представлялись их сторонникам единственно приемлемыми и поэтому они развивались параллельно и практически независимо.

Несмотря на то, что для исследований турбулентности характерен «взлет и падение идей», происходит непрерывно продолжающийся, хотя и медленный, прогресс в понимании физики турбулентных течений.

История исследований турбулентности, основные достижения и их краткая характеристика, а также полуэмпирические модели турбулентности изложены в фундаментальном труде по статистической теории турбулентности А. С. Монина и А. М. Яглома [2]), а также обзорной статье Ю. В. Лапина [3]), которым, во многом, следует, но не ограничивается, дальнейшее изложение материала.

Определение и свойства турбулентности. Дать точное определение турбулентности достаточно трудно. Определение турбулентности обычно дается путем перечисления характерных черт, свойственных турбулентным движениям сплошных сред.

По-видимому, наиболее содержательное определение турбулентности принадлежит П. Брэдшоу [4]). «Турбулентность — это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса».

В книге А. С. Монина и А. М. Яглома турбулентность определяется как «завихренное течение с очень большим числом возбужденных

---

[1]) *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1986.

[2]) *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. В 2-х т. СПб: Гидрометеоиздат, 1992, 1996.

[3]) *Лапин Ю. В.* Статистическая теория турбулентности: прошлое и настоящее (краткий очерк идей) // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2004. № 2. С. 7–20.

[4]) *Bradshow P.* An introduction to turbulence and its measurement. Pergamon Press, 1971.

степеней свободы и с хаотическим распределением дисперсионных соотношений и фазовых сдвигов».

Следуя этим определениям, приведем развернутую характеристику свойств турбулентного движения.

Континуальность. Турбулентность обладает свойством континуальности, поскольку наименьшие из масштабов, присущих турбулентному движению, обычно значительно превосходят масштабы молекулярного движения (среднюю длину свободного пробега молекул). Исходная предпосылка математического моделирования турбулентности состоит в предположении о приемлемости уравнений Навье–Стокса для интерпретации турбулентных течений и предсказания их мгновенных характеристик.

Нерегулярность. Для турбулентных течений жидкостей и газов характерен нерегулярный или случайный характер изменения характеристик потока в пространстве и времени.

Высокие числа Рейнольдса. Турбулентность возникает при высоких числах Рейнольдса (в некоторых случаях в результате неустойчивости ламинарного течения). Неустойчивость связана с взаимодействием вязких и нелинейных инерционных членов в уравнении изменения количества движения.

Трехмерность. Турбулентность представляет собой вихревое движение сплошной среды, и это движение трехмерно. Турбулентное течение всегда имеет три составляющие скорости, даже если средняя скорость потока имеет только одну или две составляющие.

Вихревая природа. Турбулентность характеризуется высоким уровнем флуктуаций завихренности (завихренность не равняется нулю, по крайней мере, в некоторой области пространства). Механизм, поддерживающий завихренность (растяжение вихрей), отсутствует в двумерном движении сплошной среды.

Нелинейность. Одним из важных свойств уравнений Навье–Стокса является их нелинейность. Нелинейность системы означает, что процессы, протекающие в ней, не удовлетворяют принципу суперпозиции (взаимодействие возмущений разного масштаба возможно только в нелинейной системе). Аналитическое описание процессов в нелинейных системах затрудняется в связи с отсутствием общих методов решения нелинейных уравнений. Для исследования нелинейных систем, за исключением ограниченного числа случаев, используются численные методы.

Диссипативность. Турбулентные движения сплошной среды всегда диссипативны (в бизвихревом течении вязкая диссипация отсутствует). Вязкие напряжения сдвига выполняют работу деформации, которая увеличивает внутреннюю энергию среды за счет кинетической энергии турбулентности. Случайные движения, например, случайные звуковые волны (акустический шум) обладают незначительными вязкими потерями и турбулентными не являются.

Диффузионность. Важное свойство всех турбулентных движений сплошной среды связано с фактом быстрого перемешивания и возрастания скорости обмена импульсом, теплом и веществом по сравнению с ламинарными движениями.

Процесс возникновения турбулентности в течении, изначально являющимся безвихревым, обусловлен вязкостью. Из теоремы Кельвина следует, что нулевая завихренность сохраняется в процессе движения идеальной жидкости. Присутствие твердых границ накладывает условие нулевой скорости на стенке, которое порождает завихренность. Производство завихренности увеличивается вследствие механизма растяжения вихревых нитей, и в этой области течение, как правило, становится турбулентным.

С теоретической точки зрения, турбулентные течения представляют собой пример нелинейной механической открытой системы с большим числом степеней свободы. В реальных турбулентных потоках спектр изменения волновых чисел (диапазон изменения масштабов турбулентного движения) достигает нескольких порядков.

Турбулентность — не физическое свойство жидкостей или газов, а свойство, связанное с их движением. Основные характеристики турбулентных течений не контролируются молекулярными свойствами среды, которая находится в состоянии турбулентного движения.

Методология Рейнольдса. Существование ламинарных и турбулентных режимов течения было замечено еще в первой половине XIX в. (по некоторым данным, наблюдения за явлением турбулентности восходят еще к Леонардо да Винчи, о чем можно судить по его зарисовкам, относящимся к 1510 г.), но начало научных исследований турбулентности обычно связывают с работами О. Рейнольдса, опубликованными в 1883–1895 гг.

Изучая условия перехода ламинарного течения жидкости в трубах в турбулентное, Рейнольдс [1]) установил существование критерия динамического подобия течений вязкой несжимаемой жидкости $\mathrm{Re} = UL/\nu$, где U и L — характерные масштабы скорости и длины, ν — кинематический коэффициент вязкости (для течения в трубе в качестве U и L используется среднерасходная скорость и диаметр трубы). Число Рейнольдса интерпретируется как мера относительной значимости сил инерции и сил вязкости, действующих внутри жидкости. Из опытов Рейнольдса следует, что существенное влияние на характер течения в трубе оказывают возмущения во входном сечении. При малых числах Рейнольдса эти возмущения затухают на некотором расстоянии от входного сечения, а течение в трубе является ламинарным. При дости-

[1]) *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and of the law of resistance in parallel channels // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. 1884. V. 174. P. 935–982.

жении числом Рейнольдса некоторого критического значения (в опытах Рейнольдса для течения в трубе $\mathrm{Re}_* \sim 2000$) возмущения не затухают, и течение в трубе становится турбулентным. При высоких числах Рейнольдса силы инерции существенно превосходят силы вязкости и вызывают перемешивание конечных объемов жидкости (молей), движущихся с разными скоростями. В результате осуществляется передача энергии от крупномасштабных вихревых структур к мелким, образующимся за счет потери устойчивости более крупных вихрей. Поглощая энергию основного потока, эти структуры оказываются сильно анизотропными, завихренными и существенно отличаются от течения к течению.

Современные исследования показывают, что переход к турбулентности при течении в трубе не является раз и навсегда произошедшим катастрофическим событием. Он более похож на квазипериодический процесс, известный под названием берстинга (bursting).

В работе О. Рейнольдса [1]) сформулирована общая методология описания турбулентных течений, согласно которой мгновенные значения искомых функций (скорости, плотности, давления, температуры) представляются в виде суммы средней и пульсационной составляющих $f = \bar{f} + f'$. Изучение и описание поведения средних характеристик потока, сравнительно плавно меняющихся в пространстве и времени, оказывается более простой задачей, чем исследование трехмерного нестационарного и хаотического движения, каковым в действительности является турбулентное течение.

Метод Рейнольдса используется для осреднения уравнений, описывающих низкоскоростные (несжимаемые) турбулентные течения вязкой жидкости. Для моделирования турбулентных течений сжимаемых сред подход Рейнольдса используется сравнительно редко. Осреднение уравнений, описывающих течения сжимаемого газа, обычно проводится при помощи подхода Фавра [2]), в котором вводятся средневзвешенные параметры потока таким образом, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности $\tilde{f} = \overline{\rho f}/\bar{\rho}$, где черта соответствует осреднению по времени.

Метод Рейнольдса составляет целую эпоху в теории турбулентности и до сих пор является основным методом, используемым на практике. Однако этот подход не позволяет получить решение той или иной задачи в рамках строгой математической постановки, поскольку уравнения, полученные Рейнольдсом, являются незамкнутыми. В отличие от уравнений динамики вязкой жидкости, содержащих тензор вязких напряжений, который для ньютоновских сред выражается

---

[1]) *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1895. V. 186. P. 123–161.

[2]) *Favre A. J.* Review of space-time correlations in turbulent fluids // Journal of Applied Mechanics. 1965. V. 32. P. 241–257.

через тензор скоростей деформаций, уравнения Рейнольдса содержат компоненты тензора конвективных (рейнольдсовых или турбулентных) напряжений, возникающих из осредненных произведений флуктуаций скорости, природа и свойства которых определяются характеристиками пульсационного движения.

Для замыкания основных уравнений необходимо установить связь между конвективными напряжениями и средними характеристиками потока. Многие теоретические и экспериментальные усилия были сфокусированы на поиске связей, применимых ко всему многообразию средних течений с надеждой найти универсальное соотношение. Нет гарантии, что такое соотношение существует, и цель этих усилий остается во многом недостижимой. Надежда на универсальную модель турбулентности постепенно заменяется растущей уверенностью в том, что формулировка адекватной теории требует значительно лучшего понимания физики турбулентного течения.

Каскадный механизм передачи энергии. В ламинарном течении под действием напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, кинетическая энергия среднего течения непосредственно превращается во внутреннюю тепловую энергию.

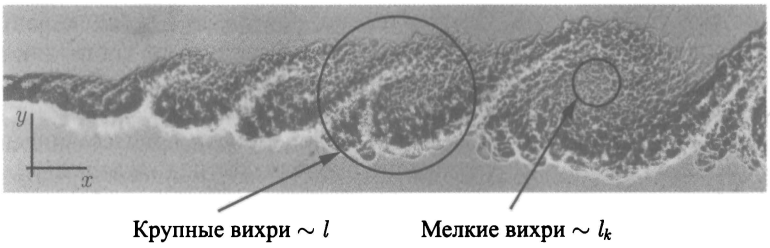
В турбулентном потоке крупные вихри отбирают энергию у среднего течения и сохраняют ее некоторое время, пока она не перейдет к мелким вихрям, рассеивающим кинетическую энергию в тепло.

Иллюстрацией вихревой природы турбулентных течений и иерархии вихрей различного масштаба служат теневые фотографии течений в свободном слое смешения и свободной затопленной струе [1]). Визуальное свидетельство мелкомасштабной структуры турбулентности обнаруживается, если в турбулентном течении имеются температурные флуктуации. Градиенты температуры и показатель преломления оказываются наиболее крутыми, если они связаны с вихрями наименьшего масштаба. Любая оптическая система, которая чувствительна к таким флуктуирующим градиентам, фиксирует мелкомасштабную структуру турбулентности.

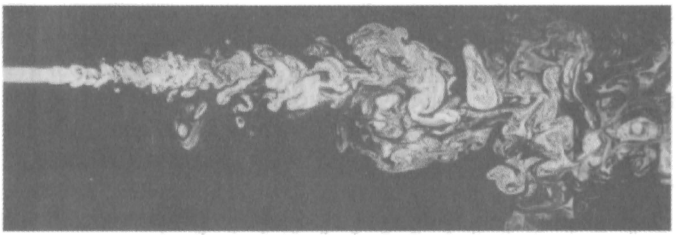
Пластина, находящаяся за левым краем рисунка, разделяет высокоскоростное течение (сверху) от низкоскоростного (снизу). В данном случае диссипация кинетической энергии турбулентности имеет место в диапазоне волновых чисел $0{,}1 < \kappa/\kappa_k < 1$, что соответствует интервалу масштабов $6 < l/l_k < 60$, где κ_k и l_k — волновое число и масштаб Колмогорова.

На другой фотографии показана турбулентная струя, истекающая из круглого сопла в затопленное пространство. При малых относительных расстояниях от среза сопла струя является ламинарной. На расстояниях порядка нескольких калибров от среза сопла возникает

[1]) *Van Dyke M.* Album of fluid motion. Parabolic Press Inc, 1982.



Течение в слое смешения



Течение в свободной затопленной струе

неустойчивость струи с последующим образованием вихревых колец и переход к состоянию турбулентного движения.

Основной механизм, который отвечает за распределение энергии турбулентного потока по широкому диапазону масштабов (волновых чисел или длин волн), связан с растяжением вихрей (молей, сгустков завихренности). В процессе растяжения вихрей их кинетическая энергия вращательного движения увеличивается, а масштаб уменьшается. Увеличение местных скоростей деформаций стимулирует растяжение других вихрей, запуская тем самым каскадный процесс интенсификации движения с постепенной редукцией масштабов вихрей, подвергнутых растяжению.

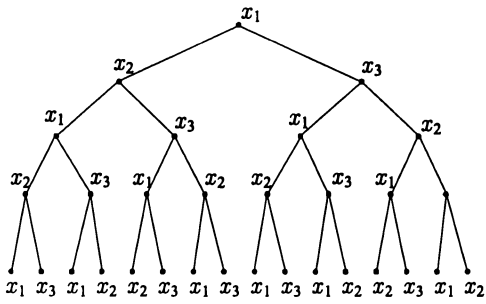
Описание этого процесса принадлежит Л. Ричардсону [1]). Каскадный процесс передачи энергии в турбулентном потоке, использующий представление о существовании иерархии вихрей различного масштаба, завершается на самых мелкомасштабных структурах вязкой диссипацией кинетической энергии в тепло (в процессе растяжения вихрей вязкость не играет существенной роли).

Пренебрегая вязкостью, из закона сохранения момента количества движения следует, что произведение завихренности на квадрат радиуса является постоянным. Другими словами, в отсутствие сил вязкости, в процессе растяжения циркуляция скорости вокруг вихревых элемен-

[1]) *Richardson L. F.* Weather prediction by numerical process. Cambridge, Cambridge University Press, 1922.

тов остается постоянной. Следовательно, растяжение в одном направлении приводит к уменьшению размеров и увеличению составляющих скорости в двух других направлениях, вследствие чего растяжению подвергаются вихревые трубки, имеющие составляющие завихренности вдоль этих направлений. Вследствие нелинейности процесса интенсификации завихренности, растяжение преобладает над сжатием.

Графическая схема процесса растяжения вихревых трубок и дробления масштабов предложена П. Брэдшоу.



x_1	x_2	x_3
1	0	0
0	1	1
2	1	1
2	3	3
6	5	5
10	11	11
22	21	21

Графическая схема Брэдшоу

Растяжение вдоль оси x_1 приводит к интенсификации движения вдоль осей x_2 и x_3, вызывающей растяжение меньших масштабах вдоль осей x_2 и x_3 и интенсификацию движения вдоль осей x_1, x_2 и x_3 соответственно. Таким образом, исходное растяжение в одном направлении приводит к прогрессивно нарастающему растяжению во всех трех направлениях. Влияние направленности средней скорости деформации ослабляется при каждом новом растяжении и, как следствие, мелкомасштабные вихри в турбулентном течении имеют более универсальную структуру, которая является однородной и изотропной.

Теория локально-изотропной турбулентности. Понимание роли мелкомасштабной турбулентности в процессах турбулентного переноса пришло после опубликования работы Дж. Тэйлора [1]), в которой введено понятие однородной и изотропной турбулентности. Для полностью развитой турбулентности случайные функции потока являются статистически независимыми при параллельном переносе (однородность) и вращении (изотропность). Иными словами, для турбулентности, характеризующейся слабой зависимостью от индивидуальных особенностей течения, имеет место инвариантность свойств относительно любых ортогональных преобразований, например, параллельных переносов или вращений.

[1]) *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1935. V. 151. P. 421–478.

Теория локально-изотропной и однородной турбулентности представляет собой наиболее глубоко проработанный раздел теории турбулентности.

Наиболее важные и принципиальные результаты в изучении мелкомасштабной турбулентности получены А. Н. Колмогоровым [1]), который является создателем целостной теории локально-изотропной турбулентности. Колмогоров дополнил представления о каскадном механизме передачи энергии, отметив ослабление ориентирующего влияния среднего течения при каждом переходе к более мелким структурам и сформулировал гипотезу о том, что статистический режим мелкомасштабной турбулентности является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами — средней скоростью диссипации кинетической энергии и коэффициентом вязкости. Среднее течение влияет на режим мелкомасштабной турбулентности через величину потока энергии, передающегося от самых крупных структур через их иерархию до самых мелких, на которых механическая энергия превращается в тепло.

Кинетическая энергия и скорость ее диссипации, характеризующая среднее количество энергии, переходящей в тепло в единице массы жидкости за единицу времени, определяются соотношениями

$$k = \frac{1}{2}\sum_i \overline{v_i' v_i'}, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right)^2},$$

где v_i — мгновенная скорость. Черта обозначает осредненное значение. Штрих относится к пульсационной скорости. Диссипацией энергии среднего течения под влиянием молекулярной вязкости при больших числах Рейнольдса обычно пренебрегается.

Гипотеза Колмогорова об универсальности статистического режима мелкомасштабной турбулентности и его зависимости только от скорости диссипации и коэффициента вязкости, а также соображения размерности позволяют оценить нижнюю границу линейных, скоростных и временны́х масштабов вихрей, участвующих в процессе диссипации (колмогоровские масштабы длины, скорости и времени)

$$l_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/3}, \quad v_k = (\nu\varepsilon)^{1/4}, \quad \tau_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}.$$

Колмогоровский масштаб длины характеризует линейные размеры вихрей, на которые вязкость еще оказывает существенное влияние. Степень многомасштабности процессов турбулентного переноса оценивает-

[1]) *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.

ся, соотнося характерный размер течения с колмогоровским масштабом длины (из соображений размерности следует, что $l_k/L \sim \mathrm{Re}^{-3/4}$).

Справедливость колмогоровской теории локально-изотропной турбулентности подтверждается результатами многочисленных экспериментов, в частности, данными измерений спектральной плотности энергии пульсаций продольной скорости в различных течениях (полностью развитое турбулентное течение в трубе, затухающая турбулентность за решеткой и другие)

$$\int_0^\infty E(\kappa) = \overline{u'^2},$$

где κ — волновое число. Величина, обратная волновому числу, трактуется как размер турбулентного моля, причем малые волновые числа соответствуют крупным вихрям, и наоборот.

Прямолинейный участок на кривой продольного одномерного спектра, описываемого соотношением $(\kappa/\kappa_k)^{-5/3}$, где κ_k — волновое число Колмогорова, получившим название «закона пяти третей» или закона Колмогорова–Обухова, свидетельствует о наличии инерциальной области спектра, на которую вязкость влияние не оказывает. На этом участке спектральная плотность удовлетворяет соотношению

$$E(\kappa) = C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3},$$

где C_k — постоянная Колмогорова ($C_k = 1{,}5$).

Для сжимаемой жидкости показатель степени у волнового числа близок к -2 (спектр более крутой).

Установление «закона пяти третей» и его экспериментальное подтверждение имеют принципиальное значение для понимания общих закономерностей процессов переноса в турбулентных потоках и играют ключевую роль при разработке современных подходов к моделированию турбулентных течений и их верификации. Неявно в идее локальной изотропии содержится предположение о том, что непосредственная связь между крупно- и мелкомасштабными движениями достаточно слабая, а поведение мелких вихрей одинако́во в различных течениях.

Другой результат колмогоровской теории локально-изотропной турбулентности состоит в установлении универсальной связи между турбулентной вязкостью, кинетической энергией турбулентности и скоростью диссипации (формула Колмогорова–Прандтля), лежащей в основе полуэмпирических моделей турбулентности, использующих уравнения переноса вторых моментов.

Статистическая теория турбулентности. В статистической теории турбулентности обычно выделяют следующие направления и подходы:

— функциональный подход, основанный на рассмотрении характеристического функционала и уравнения Колмогорова–Хопфа;

— формализм конечномерных распределений вероятности флуктуирующих параметров потока в пространстве и времени;

— формализм моментов, связанный с бесконечной зацепляющейся цепочкой уравнений Фридмана–Келлера.

При этом лишь функциональный подход к теории турбулентности, основанный на решении уравнения Колмогорова–Хопфа, является замкнутым, однако отсутствие математической теории уравнений в вариационных производных не позволяет получить на этом пути до сих пор каких-либо конкретных результатов.

В связи со сложностью решения задачи на уровне конечномерных распределений вероятности, на практике используется ряд более простых статистических величин, определяющих частные свойства потока.

Уравнения для конечномерных плотностей распределения вероятности позволяют получить бесконечную зацепляющуюся систему уравнений Фридмана–Келлера для всевозможных моментов. С вопросом о разрешимости системы уравнений Фридмана–Келлера тесно связана задача об аппроксимации бесконечной цепочки уравнений конечной системой, решения которой близки к решениям цепочки.

Проблема замыкания. В основе полуэмпирических моделей турбулентности лежит введенное Рейнольдсом представление мгновенных значений искомых функций в виде суммы средней (регулярной) и пульсационной (хаотической) составляющих. На практике ограничиваются изучением средних величин, сравнительно плавно меняющихся во времени и пространстве. При этом осреднение параметров потока понимается как теоретико-вероятностное осреднение по соответствующему статистическому ансамблю реализаций. Такая трактовка открывает путь к применению математического аппарата теории вероятностей для изучения свойств турбулентности, а сама теория турбулентности приобретает статистический характер.

Возможность использования корреляционных функций для описания турбулентных течений показана в работе Дж. Тэйлора [1]), посвященной изучению турбулентной диффузии.

В работе А. А. Фридмана и Л. В. Келлера [2]) предложен общий метод построения дифференциальных уравнений переноса моментов пульсаций скорости произвольного порядка.

Вследствие нелинейности уравнений Навье–Стокса, система уравнений Фридмана–Келлера обладает тем свойством, что уравнения для моментов низкого порядка содержат моменты более высокого порядка (число неизвестных больше числа определяющих уравнений). Любая

---

[1]) *Taylor G. I.* Diffusion by continuous movements // Proceedings of London Mathematical Society. 1921. V. 2, No. 20. P. 196–212.

[2]) *Fridman A. A., Keller L. V.* Differential equations of turbulent compressible-fluid motion. First International Congress of Applied Mechanics, 1924, Delft, Netherlands.

конечная система этих уравнений всегда является незамкнутой (так называемая проблема замыкания). Последующая история статистической теории турбулентности во многом связана с решением проблемы замыкания цепочки уравнений Фридмана–Келлера.

Для восполнения пробела между реальными турбулентными течениями и определяющими уравнениями приходится использовать экспериментальные данные, качественные рассуждения на физическом уровне строгости, методы теории размерностей, а также модельные представления о каскадном процессе передачи энергии по спектру вихрей различного масштаба и рассмотрении локально-изотропной и однородной турбулентности (полуэмпирические модели турбулентности).

Основной объект при экспериментальном и теоретическом исследовании турбулентности составляют канонические течения — относительно простые течения, свободные от влияния частных обстоятельств. Для пристенной турбулентности таковыми являются обтекание длинной плоской пластины и профиля крыла, установившееся течение в цилиндрической трубе с гладкими стенками и некоторые другие. В результате многолетних экспериментальных и теоретических исследований для этих течений накоплен обширный опытный материал, послуживший основой и стимулом для разработки эмпирических и полуэмпирических моделей турбулентности.

Важное значение для развития полуэмпирических моделей турбулентности имел закон стенки, установленный Людвигом и Тильманом [1]).

Согласно закону стенки, профили скорости во внутренней области пограничного слоя, построенные в переменных $u^+ = u/u_\tau$ и $y^+ = yu_\tau/\nu$, где u_τ — динамическая скорость, оказываются универсальными и нечувствительными к изменению внешних условий (например, к изменению продольного перепада давления, степени турбулентности внешнего потока, числа Рейнольдса, шероховатости поверхности). Протяженность области действия закона стенки существенно зависит от многих факторов. В пограничном слое на плоской пластине внутренняя область составляет примерно 20% от толщины всего слоя и в ней генерируется около 80% всей энергии турбулентности. Этот результат используется в большей части работ по структуре турбулентного пограничного слоя [2]), а также при обосновании метода пристеночных функций.

---

[1]) *Ludwig H., Tillman W.* Ing. Archiv. 1949. No. 17. P. 288–299.

[2]) *Kline J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W.* The structure of turbulent boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 30. P. 741–773.

Новый элемент к физической картине турбулентности был добавлен Коррзином [1]) и Таунсендом [2]), которые показали, что внешние границы турбулентных сдвиговых течений находятся в состоянии перемежающейся турбулентности.

Гипотеза Буссинеска. Осреднение уравнений Навье–Стокса приводит к уравнениям, которые представляют собой уравнения переноса первых корреляционных моментов пульсаций скорости. Проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных (рейнольдсовых) напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций.

Интуитивная попытка описания процессов переноса количества движения в турбулентном потоке принадлежит Буссинеску [3]). Согласно гипотезе Буссинеска, турбулентное движение рассматривается как движение ньютоновской турбулентной жидкости (турбулентные напряжения трения связываются со свойствами среднего течения такой же зависимостью, какой молекулярное вязкое трение связывается с полем скорости). Формула Буссинеска устанавливает линейную связь компонент тензора турбулентных напряжений с компонентами тензора осредненных скоростей деформаций

$$\tau_{ij} = -\overline{v_i' v_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij},$$

где ν_t — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Турбулентный тепловой поток записывается в форме закона Фурье

$$q_i = -\overline{v_i' T'} = \lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i},$$

где λ_t — коэффициент турбулентной теплопроводности, который выражается через турбулентную вязкость и турбулентное число Прандтля. Турбулентному числу Прандтля обычно присваивается постоянное значение (в некоторых подходах турбулентное число Прандтля рассчитывается по явным формулам или находится из решения соответствующих уравнений).

Интересно отметить, что работа Буссинеска опубликована до появления работ Рейнольдса.

Формула Буссинеска не решает проблему определения связи между тензором турбулентных напряжений и средними характеристиками потока, а лишь переводит ее на уровень коэффициента турбулентной

---

[1]) *Corrsin S.* Investigation of flow in axially symmetric heated jet of air // NACA Report. 1943. No. 3123.

[2]) *Townsend A. A.* Measurements in the turbulent wake of a cylinder // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1947. V. 190. P. 551–561.

[3]) *Boussinesq J.* l'Académie des sciences de l'Institut de France. 1877. V. 23, No. 1. P. 46–50.

вязкости. В связи с этим, модели турбулентности, использующие гипотезу Буссинеска, относятся к группе моделей вихревой вязкости (Eddy Viscosity Model, EVM). Важное значение формулы Буссинеска состоит в том, что она указывает на сдвиговое происхождение турбулентного напряжения (при отсутствии сдвига напряжение обращается в ноль).

Молекулярная вязкость является физическим свойством жидкостей и газов, в то время как турбулентность — свойство движения сплошной среды. Описание эффектов турбулентности с помощью понятия турбулентной вязкости не является полным и исчерпывающим. Однако в некоторых ситуациях из аналитических соображений говорят о турбулентной жидкости, а не о турбулентном течении жидкости. Так называемые турбулентные жидкости оказываются неньютоновскими. Они проявляют свойство вязкопластичности и обнаруживают при определенных условиях эффекты памяти. Память постепенно затухает с течением времени, что позволяет развить полулокальную теорию, связывающую турбулентные напряжения со средней скоростью деформации.

Несмотря на то, что гипотеза Буссинеска не выполняется во многих относительно простых течениях (например, в установившемся течении в круглой трубе, вращающейся вокруг своей оси), идея градиентного описания процессов переноса количества движения в турбулентном потоке, заключенная в формуле Буссинеска, оказалась плодотворной. Градиентное представление потоков количества движения, хотя и позволяет описать широкий класс сдвиговых течений, не является универсальным и не учитывает влияние крупномасштабных вихревых структур, обладающих свойствами анизотропии и наследственности, а также предполагает скалярный характер турбулентной вязкости. В некоторых моделях эти недостатки компенсируется удачным выбором эмпирических констант.

Гипотеза локальности. В подходе Буссинеска неявно используется допущение о локальности механизма турбулентного переноса и его зависимости от локальных характеристик потока.

Однако идея локальности не получила развития в работе Буссинеска, в которой коэффициент турбулентной вязкости рассматривается как постоянная величина, не связанная с характеристиками потока. В работе Л. Прандтля [1]) идея локальности обретает современные контуры и эффективно используется для определения коэффициента турбулентной вязкости.

Современная формулировка гипотезы локальности дается Л. Г. Лойцянским [2]). Согласно этой формулировке, механизм турбулентного переноса количества движения полностью определяется заданием местных значений производных от средней скорости по поперечной к на-

[1]) *Prandtl L.* ZAMM. 1925. V. 5. P. 136–139.

[2]) *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.

правлению потока координате и физических свойств жидкости. Влияние процессов, происходящих вдали от рассматриваемой точки, гипотезой локальности не учитывается. Уместно отметить, что сама местная скорость потока в соответствии с принципом относительности Галилея влияния на процессы переноса не оказывает.

Важность гипотезы локальности состоит в ее предназначении для описания течений, в которых имеет место доминирующее направление (пристенные пограничные слои, струйные течения, течения в длинных каналах). Следствием этого обстоятельства является неинвариантность моделей турбулентности, разработанных на основе гипотезы локальности (их применимость ограничивается рамками уравнений пограничного слоя или параболизованных уравнений Рейнольдса). Вместе с тем, теория пограничного слоя предназначена для описания течений с преимущественным направлением развития, что и определяет успех этой теории как мощного средства решения прикладных проблем механики жидкости и газа.

Классификация моделей турбулентности. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier–Stokes, RANS) используется совокупность полуэмпирических соотношений, в том числе и дифференциальных уравнений, называемых моделью турбулентности.

Вопросы замыкания уравнений Рейнольдса решаются на различном уровне сложности, что предопределяет большое разнообразие полуэмпирических моделей турбулентности — от сравнительно простых моделей нулевого порядка до моделей с несколькими дополнительными уравнениями переноса.

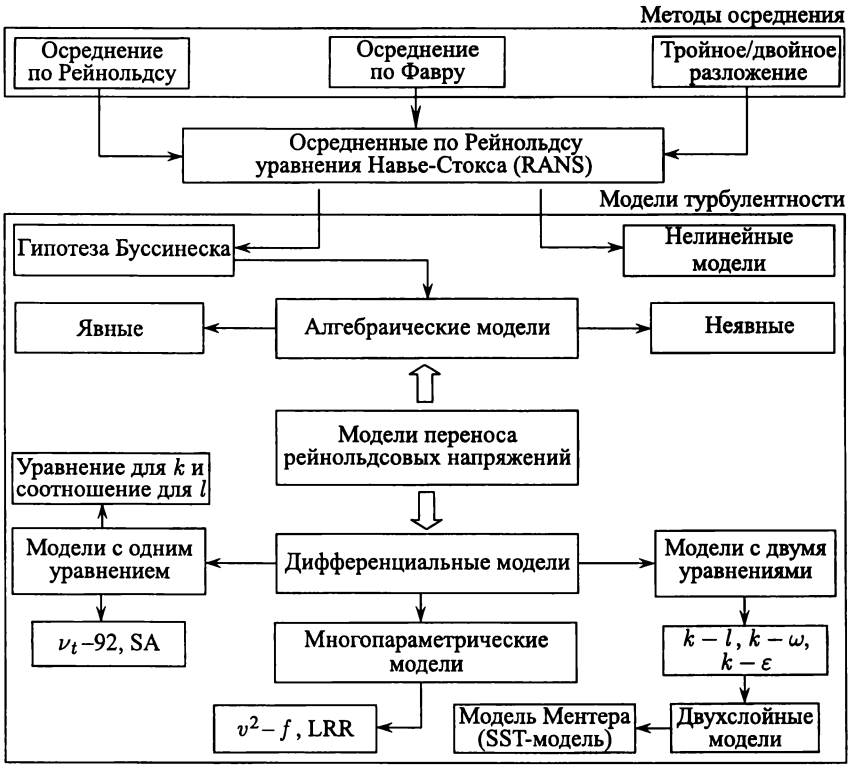
Модели турбулентности классифицируют по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к исходной системе уравнений движения и теплопереноса. Увеличение числа уравнений требует привлечения дополнительной информации полуэмпирического характера для определения модельных коэффициентов и функций, что снижает универсальность модели.

Алгебраические модели турбулентности. В алгебраических моделях турбулентности (модели нулевого порядка) связь между тензором рейнольдсовых напряжений и характеристиками среднего движения задается алгебраическими соотношениями.

В теории Прандтля принимается, что местное изменение средней скорости потока определяется первой производной от средней скорости по поперечной координате

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2,$$

где x — координата, совпадающая с направлением потока, y — поперечная координата.



Классификация полуэмпирических моделей турбулентности

Соображения размерности приводят к введению линейного масштаба l (масштаба турбулентности или пути перемешивания), который определяется при помощи дополнительных гипотез или данных измерений (например, $l = 0{,}115x$ для плоского слоя смешения и $l = 0{,}085x$ для слоя смешения с осевой симметрией). Формула Прандтля оставляет некоторые возможности для учета интегральных свойств потока и его предыстории благодаря неопределенности пути смешения.

В модели Прандтля движение частиц жидкости в турбулентном потоке полагается подобным движению молекул (масштаб турбулентности соответствует длине свободного пробега молекул, а пульсационная скорость — их тепловой скорости). Турбулентная вязкость связывается со средней скоростью посредством масштаба длины (пути смешения), на котором жидкие частицы сохраняют средние значения количества движения.

Несмотря на то, что концепция вихря играет существенную роль в построении полуэмпирических моделей турбулентности и, в частности, в модели Прандтля, она является абстрактной, поскольку пре-

следует одну цель — попытаться схематично изобразить турбулентное течение.

Разработка модели Прандтля положила начало современной полуэмпирической теории турбулентности. Один из важных результатов теории пути смешения состоит в установлении универсального логарифмического закона для профиля скорости в пристенной области для течений в трубах, каналах, пограничных слоях. В работе А. Таунсенда [1]) получен обобщенный закон стенки — закон стенки для выпуклой криволинейной поверхности.

В теории Т. Кармана [2]) турбулентные напряжения определяются первой и второй производными средней скорости по поперечной координате

$$\tau_{xy} = \rho \varkappa^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^{-2},$$

где $\varkappa$ — постоянная Кармана ($\varkappa = 0{,}41$).

Отсутствие в формуле Кармана пути перемешивания делает ее в некоторых случаях более предпочтительной по сравнению с формулой Прандтля. Существенным недостатком формулы Кармана является невозможность ее применения к расчету течений, в которых профиль скорости имеет точку перегиба $\partial^2 \bar{u}/\partial y^2 = 0$ (например, для моделирования струйных течений).

В работе И. Ван Дриста [3]) на основе аналогии между движением вязкой жидкости вблизи колеблющейся пластины и турбулентным движением в окрестности стенки решена проблема взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя (демпфирующий множитель Ван Дриста, учитывающий влияние стенки на процессы турбулентного переноса)

$$f = \left[1 - \exp\left(\frac{y^+}{A}\right)\right]^2,$$

где A — эмпирическая постоянная ($A = 25$).

Введение эффективной вязкости $\nu_{\text{eff}} = \nu + f\nu_t$ позволяет отказаться от дискретной схемы (ламинарный подслой и турбулентное ядро) и открывает возможности для непрерывного описания внутренней области пограничного слоя, включающей вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скорости.

---

[1]) *Townsend A. A.* Equilibrium layers and wall turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 1961. V. 11. P. 97–120.

[2]) *Karman Th.* Third International Congress on Applied Mechanics, 1930, Stockholm, Sweden.

[3]) *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall // Journal of Aeronautical Sciences. 1956. V. 23. P. 1007–1011.

Современные модели турбулентности данной группы основаны на представлениях о двухслойной структуре турбулентного пограничного слоя, сформулированных в работе Ф. Клаузера [1]).

Пограничный слой разделяется на две подобласти: внутреннюю (область закона стенки), с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, и внешнюю, населенную крупномасштабными вихрями. Внутренняя область включает вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скорости, а внешняя — область закона следа с характерной для нее постоянной турбулентной вязкостью и область перемежаемости, существование которой экспериментально установлено П. Клебановым [2]). Затухание возмущений, внесенных в пограничный слой, во внутренней области происходит на расстояниях порядка нескольких толщин пограничного слоя, а во внешней области зона релаксации занимает несколько десятков его толщин.

В формуле Клаузера в качестве масштаба скорости используется динамическая скорость $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, где τ_w — напряжение трения на стенке, а в качестве линейного масштаба — толщина пограничного слоя δ. Неточность, присущая определению толщины пограничного слоя (обычно она определяется как расстояние от стенки, на котором скорость отличается от скорости во внешнем потоке на некоторую заданную величину), побудили Клаузера отказаться от этой формулы и перейти к соотношению, в котором в качестве масштаба скорости фигурирует скорость на внешней границе пограничного слоя U, а в качестве масштаба длины — однозначно определяемый интегральный дефект скорости

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{U-u}{u_\tau}\, dy.$$

Из соображений размерностей следует, что во внешней области имеет место соотношение

$$\nu_t = k u_\tau \Delta = k U \delta^*, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

где k — постоянная Клаузера ($k = 0{,}018$), δ^* — толщина вытеснения.

Формула Прандтля для турбулентной вязкости во внутренней области пограничного слоя (при $l = \varkappa y$) принимает вид

$$\nu_t = \varkappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

---

[1]) *Clauser F. H.* Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients // Journal of Aeronautical Sciences. 1954. V. 21. P. 91–108.

[2]) *Klebanoff P. S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // NACA Report. 1955. No. 1247.

Формула Прандтля для турбулентной вязкости во внутренней области вместе с соотношениями Клаузера составляют полномасштабную модель турбулентной вязкости, широко используемую (в форме различных модификаций) в практических расчетах.

Модель Прандтля находит применение для расчета тонких вязких слоев и свободных слоев со сдвигом. Другие модели, например, модели Болдуина–Ломакса [1]) и Джонсона–Кинга [2]), используются для расчетов погранслойных течений с отрывом и присоединением потока.

Алгебраические модели турбулентности обладают вычислительной эффективностью и простотой модификации. Вместе с тем, они мгновенно реагируют на изменения параметров потока и неприменимы в случаях с доминирующим влиянием конвективного и диффузионного переноса.

Узкая специализация ограничивает область применения алгебраических моделей. Эмпирические константы, значения которых находятся из опытов, не обладают свойством универсальности (постоянства при изменении числа Рейнольдса) и требуют корректировки. Например, в формулу для турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя включается коэффициент перемежаемости Клебанова, учитывающий снижение турбулентной вязкости вблизи внешней границы слоя.

Массовые силы, возникающие вследствие влияния сил плавучести или кривизны линий тока, существенно изменяют величину пути перемешивания. Подобный эффект учитывается при помощи полуэмпирических формул, параметрами которых являются турбулентные числа Рейнольдса и Ричардсона [3]).

В 1968 г. в Стэнфорде (США) состоялась 1-я Стэнфордская конференция по расчетам турбулентных пограничных слоев (AFOSR-IFP Stanford Conference on Computation of Turbulent Boundary Layers, 18–23 August 1968, Stanford, CA, USA), посвященная проблемам турбулентного пограничного слоя, оценке состояния и возможностей моделей турбулентности. В заключении конференции [4]) отмечается неэффективность существующих подходов при оценке характеристик пограничных слоев в неравновесных условиях (течения со знакопеременным продольным перепадом давления, течения с положительным градиен-

[1]) *Baldwin B. S.*, *Lomax H.* Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // AIAA Paper. No. 78–257.

[2]) *Johnson D. A.*, *King L. S.* A mathematically simple turbulence closure and separated turbulent boundary layers // AIAA Journal. 1985. V. 23. P. 1684–1692.

[3]) *Leschziner M. A.*, *Rodi W.* Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulent-model variations // Journal of Fluid Engineering. 1981. V. 103, No. 11. P. 353–360.

[4]) *Kline S. J.*, *Moffatt H. K.*, *Morkovin M. V.* Report on the AFOSR-IFP-Stanford conference on computation of turbulent boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. 1969. V. 36. P. 481–484.

том давления и предсказание точки отрыва пограничного слоя, течения с сильным отрицательным градиентом давления, приводящим к обратному переходу от турбулентного режима течения к ламинарному). Косвенным следствием этого явилось снижение интереса к разработке алгебраических моделей турбулентности и уменьшение масштабов экспериментальных исследований турбулентных пограничных слоев.

В дальнейшем, ввиду отсутствия строгой и универсальной модели турбулентности и выявленными недостатками других моделей (в частности, двухпараметрических моделей), интерес к алгебраическим моделям появился вновь.

Получили развитие алгебраические модели, основанные на дополнительных предположениях относительно конвективного и диффузионного переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений (Algebraic Stress Model, ASM), которые делятся на явные и неявные [1]).

В неявных алгебраических моделях (Implicit ASM, IASM) используется условие о пропорциональности конвективных и диффузионных членов уравнений переноса компонент рейнольдсовых напряжений соответствующим членам в уравнении для кинетической энергии турбулентности. Компоненты тензора рейнольдсовых напряжений представляются в следующем виде

$$\langle v_i' v_j' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_i,$$

где T_i представляет собой симметричный тензор, зависящий только от тензора скоростей деформаций и завихренности среднего движения. Однако в силу существенной нелинейности модельных алгебраических соотношений, отсутствует гарантия единственности решения, а при некоторых условиях эти уравнения оказываются сингулярными.

В явных алгебраических моделях (Explicit ASM, EASM) уравнения, полученные в рамках моделей неявного типа, приближенным методом разрешаются относительно компонент рейнольдсовых напряжений, что снимает проблему неединственности решения.

Детальные исследования распределений турбулентной вязкости в поперечных сечениях потока в круглой трубе при больших числах Рейнольдса, проведенные Дж. Лауфером [2]) (при $\mathrm{Re} = 4{,}3 \cdot 10^5$) и В. Нуннером [3]) (при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^5$), показали, что турбулентная вяз-

---

[1]) *Лапин Ю. В.*, *Гарбарук А. В.*, *Стрелец М. Х.* Алгебраические модели турбулентности для пристенных канонических течений (немного истории и некоторые новые результаты) // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2004. № 2. С. 81–95.

[2]) *Laufer J.* The structure of turbulence in fully developed pipe flow // NACA Technical Report. 1954. No. 1174.

[3]) *Nunner W.* Heat transfer and pressure drop in rough tubes // VDI-Forschungsheft. 1956. No. 455. P. 5–39.

кость в центральной части потока (при $r/R < 0{,}3$) примерно постоянна (интенсивность турбулентность соответствует 2,8 % скорости на оси или 80 % скорости трения). Это обстоятельство дало основание и послужило стимулом для разработки двухслойных алгебраических моделей турбулентности для установившегося течения в круглой трубе, подобных моделям, широко применяемым при расчетах пристенных турбулентных пограничных слоев.

В рамках двухслойной схемы пограничного слоя разрабатываются достаточно простые алгебраические модели для расчета течений с положительным градиентом давления [1]), сравнимые по точности с дифференциальными моделями турбулентности. При этом учитывается как прямое, так и перекрестное влияние нескольких одновременно действующих факторов, в частности, продольного перепада давления, вдува или отсоса газа через пористую поверхность, поперечной кривизны поверхности [2]).

Дифференциальные модели турбулентности. В основе полуэмпирической теории Прандтля и ее модификаций лежит гипотеза локальности механизма турбулентного переноса, согласно которой турбулентные напряжения зависят только от локальной структуры среднего течения. Для неравновесных течений, в которых структура среднего течения не соответствует внутренней структуре турбулентности, применение гипотезы локальности оказывается тем менее оправданным, чем больше степень этого несоответствия. Это обстоятельство диктует необходимость установления связи между компонентами тензора турбулентных напряжений и локальными параметрами турбулентного потока, поскольку равновесие внутренней структуры турбулентности устанавливается быстрее, чем равновесие между турбулентностью и средним течением.

Приведенные соображения стали исходной предпосылкой для разработки полуэмпирических теорий турбулентности на основе уравнений переноса вторых моментов, в частности, уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и уравнений переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Возможности для обоснованного установления связей между неизвестные членами и характеристиками среднего течения оказались довольно многообразными, что привело к разработке большого числа моделей подобного рода.

---

[1]) *Гарбарук А. В., Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.* Оценка возможностей явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений применительно к расчету пристенных пограничных слоев // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37, № 6. С. 920–927.

[2]) *Гарбарук А. В., Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.* Турбулентный пограничный слой при одновременном влиянии продольного перепада давления, вдува (отсоса) и поперечной кривизны поверхности // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, № 3. С. 436–441.

Фундаментальную роль в теории турбулентности, основанной на привлечении уравнений переноса вторых моментов, сыграли работы Колмогорова [1]) и Прандтля [2]), в которых коэффициент турбулентной вязкости связывается с кинетической энергией турбулентности

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^{1/2}}{\rho} l,$$

где c_μ — эмпирическая постоянная ($c_\mu = 0{,}09$).

Кинетическая энергия турбулентности находится при помощи интегрирования соответствующего уравнения переноса, а скорость диссипации при больших числах Рейнольдса выражается через кинетическую энергию и интегральный масштаб турбулентности

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\rho} l.$$

Принятие гипотезы Колмогорова–Прандтля предполагает, что процессом, определяющим скорость диссипации, является не сам процесс диссипации (процесс превращения кинетической энергии мелкомасштабных вихрей в тепло), а процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким, который зависит лишь от величин плотности, масштаба дины и кинетической энергии и не зависит от вязкости.

Меньшее распространение получили модели, основанные не на гипотезе Колмогорова–Прандтля, а на гипотезе, получившей развитие в работах В. Г. Невзглядова [3]) и Г. Драйдена [4]), согласно которой постулируется линейная связь турбулентного напряжения и кинетической энергии турбулентности

$$\tau_{xy} = ak,$$

где a — эмпирическая постоянная ($a \sim 0{,}31$).

Критика гипотезы Невзглядова–Драйдена состоит в том, что скорость диссипации по своей природе тензорная величина, а кинетическая энергия — скалярная. Тем не менее, это обстоятельство не помешало использовать гипотезу Невзглядова–Драйдена в высокорейнольдсовых версиях k–ε модели при формулировке пристеночных функций.

Гипотезы Колмогорова–Прандтля и Невзглядова–Драйдена являются по своей структуре локальными, поскольку связывают локальное значение одной характеристики турбулентного потока с локальными значениями других.

---

[1]) *Колмогоров А. Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Серия физическая. 1942. Т. 6, № 1–2. С. 56–58.

[2]) *Prandtl L.* Nacr. Ahad. Wiss. 1945. No. 6. P. 6–19.

[3]) *Невзглядов В. Г.* К статистической теории турбулентности // ДАН СССР. 1945. Т. 47, № 3. С. 482–485.

[4]) *Dryden H. L.* Air flow in the boundary layer near a plate // NACA Report. 1936. No. 562.

Исключая из формулы Колмогорова–Прандтля интегральный масштаб, получается соотношение, связывающее коэффициент турбулентной вязкости, кинетическую энергию турбулентности и скорость диссипации

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\rho\varepsilon}.$$

В наиболее простых моделях для определения интегрального масштаба турбулентности используется допущение о его адекватности пути смешения. В более сложных моделях вместо алгебраических соотношений для масштаба турбулентности используются дифференциальные уравнения. Наибольшее распространение получили двухпараметрические модели, в которых вместо уравнения для масштаба турбулентности используется уравнение для скорости диссипации. Семейство этих моделей получило наименование k–ε моделей турбулентности.

Использование скорости диссипации вместо масштаба турбулентности дает ряд практических преимуществ. Уравнение для скорости диссипации выводится из уравнений Навье–Стокса путем применения соответствующей процедуры, построенной Б. И. Давыдовым [1]), включающей осреднение по Рейнольдсу и моделирование отдельных членов полученного уравнения.

Уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, пригодные для численных расчетов, сформулированы Б. Лаундером и Д. Сполдингом [2]).

Уравнения k–ε модели используются для описания развитых турбулентных течений (течений, на которых не сказываются эффекты вязкости). Применительно к турбулентным пограничным слоям это означает возможность применения уравнений k–ε модели к областям течения, лежащим вне вязкого подслоя и переходной области. Недостатки k–ε моделей при моделировании пристенных течений связаны с особенностями скорости диссипации как параметра турбулентности и условиями настройки уравнения для диссипативной функции на определенный тип закона стенки, отражающего характер профиля скорости в пристеночной области.

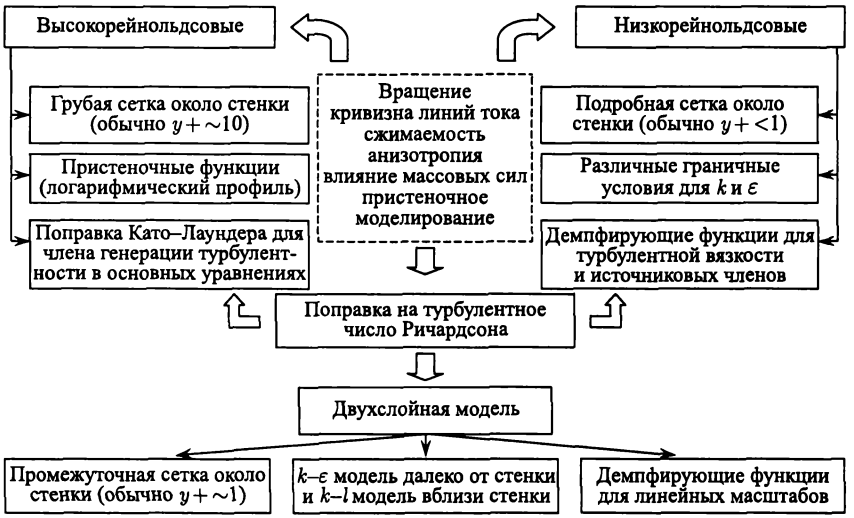
Для моделирования течений в пристеночной области традиционно применяется несколько подходов — метод пристеночных функций, низкорейнольдсовые модели турбулентности и двухслойная k–ε/k–l модель.

В методе пристеночных функций вязкий подслой и переходная область пограничного слоя не отыскиваются, а описываются полу-

---

[1]) *Давыдов Б. И.* К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости // ДАН СССР. 1961. Т. 136, № 1. С. 47–51.

[2]) *Launder B. E., Spalding D. B.* The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3, No 2. P. 269–289.



Различные версии k–ε модели турбулентности

эмпирическими формулами (пристеночными функциями). Пристеночные функции позволяют перенести граничные условия с поверхности в точки, расположенные вне области влияния вязкости (как правило, в области логарифмического профиля скорости). Точный расчет характеристик турбулентности и напряжения трения на стенке требует сгущения узлов сетки около стенки. Увеличение сеточного разрешения около стенки (до $y^+ \sim 10$) обычно приводит к более высокой точности.

Улучшение точности достигается при помощи решения упрощенных уравнений пограничного слоя в пристеночном контрольном объеме (время счета увеличивается приблизительно на 30 %).

Длительный опыт применения стандартной k–ε модели с использованием различных модификаций пристеночных функций (высокорейнольдсовая версия k–ε модели) свидетельствует о нерешенности многих проблем, связанных с описанием пристеночных эффектов при больших продольных перепадах давления, малых и переходных числах Рейнольдса, а также в трехмерных течениях.

Стремление расширить границы применимости k–ε модели вплоть до стенки, включая вязкий подслой (при условии необходимого разрешения сетки в пограничном слое), привело к созданию ее низкорейнольдсовых версий, различающихся формой записи источниковых членов, граничными условиями на стенке, а также демпфирующими функциями, учитывающими влияние вязкости на характеристики тур-

булентности вблизи стенки [1]). Несмотря на многочисленные расчеты и тестирование, применение низкорейнольдсовых моделей на практике представляется затруднительным.

Другой подход предполагает замену пристеночных функций на двухслойные модели турбулентности. Модели этого типа справедливы для расчетов турбулентных течений во всей расчетной области, однако требуют хорошего сеточного разрешения в области пограничного слоя.

Двухслойная модель представляет собой компромиссный вариант между высоко- и низкорейнольдсовыми моделями турбулентности. Пристеночная область разделяется на две подобласти — внутреннюю и внешнюю, граница между которыми зависит от локального числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_y = k^{1/2}y/\nu$. Во внешней области (при $\mathrm{Re}_y > \mathrm{Re}_{y*}$) используются уравнения k–ε модели, а во внутренней области (при $\mathrm{Re}_y < \mathrm{Re}_{y*}$) течение описывается k–l моделью [2]). Обычно принимается, что $\mathrm{Re}_{y*} = 180 \div 220$. Во внутренней области $\varepsilon = k^{3/2}/l_\varepsilon$ и $\nu_t = c_\mu l_\mu k^{1/2}$. Версии двухслойной модели различаются выбором масштабов l_μ and l_ε. В простейшем случае для нахождения линейных масштабов в зависимости от расстояния от стенки используется модель пути смешения Прандтля с учетом поправки Ван Дриста [3]). В более сложном случае [4]) в качестве линейного масштаба скорости используется среднеквадратическая величина поперечной скорости, а не величина $k^{1/2}$. Линейные масштабы рассчитываются на основе результатов прямого численного моделирования полностью развитого турбулентного течения в канале.

Для устранения резкого перехода между подобластями, приводящего к проблемам, связанным со сходимостью решения, вводится функция перехода [5]), позволяющая избежать явного разделения пристенной области течения на подобласти.

Разработка моделей турбулентности на основе уравнений переноса вторых моментов представляет значительный шаг вперед по сравнению с алгебраическими моделями. Несмотря на локальный характер со-

---

[1]) *Волков К. Н.* Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования течения в канале // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 365–378.

[2]) *Wolfshtein M.* The velocity and temperature distribution of one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12, No. 3. P. 301–318.

[3]) *Rodi W.* Experience with two-layer models combining the k–ε model with one-equation model near wall // AIAA Paper. No. 91–0216.

[4]) *Rodi W., Mansour N. N., Michelassi V.* One-equation near-wall turbulence modeling with the aid of direct simulation data // Journal of Fluids Engineering. 1993. V. 115. P. 196–205.

[5]) *Jongen T., Marx Y. P.* Design of an unconditionally stable, positive scheme for the k–ε and two-layer turbulence models // Computers and Fluids. 1997. V. 26, No. 5. P. 469–485.

отношений Колмогорова–Прандтля, использование дифференциальных уравнений для определения характеристик турбулентности позволяет учесть конвективный и диффузионный перенос турбулентности, ее порождение за счет сдвиговых деформаций среднего течения и диссипацию за счет сил вязкости, а также предысторию течения.

В оценках эффективности дифференциальных моделей, сделанных на 2-й Стэнфордской конференции по расчетам сложных турбулентных течений в 1980 г. (AFOSR-HTTM Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Stanford, 3–6 September 1980, CA, USA), отмечаются неудовлетворенность эффективностью многочисленного семейства k–ε моделей применительно к расчету пристенных течений, в частности, к расчету отрыва турбулентного пограничного слоя под действием положительного перепада давления (1-я и 2-я Стэнфордские конференции в англоязычной литературе известны как «Stanford Olympic I» и «Stanford Olympic II»).

Применение модели k–ε сталкивается с трудностями при описании пограничных слоев с градиентом давления, сильно закрученных течений с кривизной линий тока, ламинарно-турбулентного перехода, трехмерных течений с реламинаризацией пограничного слоя, а также при моделировании сжимаемых и отрывных течений. Во многих случаях она дает завышенные значения кинетической энергии турбулентности, например, в окрестности критической точки, но хорошо согласуется с данными измерений по скорости [1]. Постоянные модели турбулентности не являются универсальными, что создает существенные трудности, поскольку приходится прибегать к их подбору, сравнивая результаты расчетов и измерений для одного характерного класса течений.

Несмотря на перечисленные ограничения, распространение k–ε модели на практике объясняется устойчивым итерационным процессом, устойчивостью к погрешностям задания входных данных и разумной точностью для широкого класса турбулентных течений. Имеются многочисленные расчеты турбулентных течений с использованием k–ε модели, а сама модель включается во все коммерческие вычислительные пакеты, предназначенные для решения задач газодинамики и теплообмена (например, Fluent, Ansys CFX, Star-CD).

Для расширения границ применимости k–ε модели турбулентности вводятся поправка Като–Лаундера [2] к слагаемому, описывающему порождение турбулентности, и поправки на кривизну линий тока.

---

[1] *Traci R. M.*, *Wilcox D. C.* Freestream turbulence effects on stagnation point heat transfer // AIAA Journal. 1975. V. 13, No. 7. P. 890–896.

[2] *Kato M.*, *Launder B. E.* The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders // Proceedings of the 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, 16–18 August 1993, Kyoto, Japan. 1993. V. 9. P. 10.4.1–10.4.6.

Для учета сжимаемости в уравнение переноса кинетической энергии турбулентности вводятся дополнительные слагаемые [1]), а скорость диссипации представляется в виде суммы соленоидальной и сжимаемой составляющих. Сжимаемая составляющая выражается в виде $\varepsilon_c = 0{,}3\varepsilon M_t^4$, где M_t — турбулентное число Маха ($M_t = k^{1/2}/c$). При малых значениях турбулентного числа Маха влиянием сжимаемости пренебрегается.

Учет влияния сил плавучести производится при помощи включения в уравнения модели турбулентности дополнительных слагаемых градиентного типа [2]).

Продолжаются разработки низкорейнольдсовых версий k–ε модели, обеспечивающих описание течений вплоть до стенки, и высокорейнольдсовых версий с использованием различных пристеночных функций.

Версия k–ε модели, разработанная на основе теории ренормализованных групп (Renormalization Group, RNG), а также Realizable k–ε модель, приспособлены для расчета течений как при высоких, так и при низких числах Рейнольдса, и устраняют некоторые недостатки исходной модели.

В RNG-модели [3]) вводится дополнительное условие в уравнение для скорости диссипации, которое улучшает точность решения для потоков с бо́льшими величинами касательных напряжений. При этом также учитывается эффект циркуляции турбулентности, что улучшает точность расчета высокоскоростных вращающихся и циркуляционных потоков. Вводится аналитическая зависимость для вычисления турбулентного числа Прандтля в процессе решения (в отличие от стандартной k–ε модели, в которой турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение). Использование аналитической формулы для турбулентной вязкости позволяет повысить точность расчета характеристик турбулентных течений при низких числах Рейнольдса (при хорошем сеточном разрешении в области пограничного слоя).

По сравнению со стандартной версией k–ε модели, в Realizable k–ε модели [4]) вводится улучшенный способ расчета турбулентной вязкости, а уравнение для скорости диссипации выводится из точного

---

[1]) *Guezengar D., Francescatto J., Guillard H., Dussauge J.-P.* Variations on a k–ε turbulence model for supersonic boundary layer computations // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 1999. V. 18. P. 713–738.

[2]) *Costa J. J., Oliveira L. A., Blay D.* Test of several versions for the k–ε type turbulence modelling of internal mixed convection flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1999. V. 42, No. 23. 4391–4409.

[3]) *Yakhot V., Orszag S. A.* Renormalization group analysis of turbulence // Journal of Scientific Computing. 1986. V. 1, No. 1. P. 1–51.

[4]) *Shih T.-H., Liou W. W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.* A new k–ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — model development and validation // Computers and Fluids. 1995. V. 24, No. 3. P. 227–238.

уравнения переноса среднеквадратического значения пульсационного вихря скорости. Термин Realizable означает, что модель удовлетворяет математическим ограничениям на нормальные напряжения, согласующимся с физикой турбулентных течений (избегаются отрицательные значения вихревой вязкости при расчете высокоградиентных течений). Это достигается при помощи введения функциональной зависимости вместо постоянного коэффициента в формуле для вихревой вязкости.

Преимущество Realizable k–ε модели состоит в том, что она более точно предсказывает распределение скорости диссипации плоских и круглых струй, а также обеспечивает лучшее предсказание характеристик вращающихся потоков, пограничных слоев, подверженных сильным градиентам давления, отрывных и рециркуляционных течений, а также потоков, в которых существуют развитые вторичные течения. Недостаток модели заключается в том, что она завышает или занижает турбулентную вязкость, когда вычислительная область содержит одновременно вращающиеся и неподвижные области (при использовании множественных систем координат или скользящих сеток). Это объясняется тем, что модель использует эффект осредненного вращения при определении турбулентной вязкости.

Для улучшения описания пристенных течений в рамках дифференциальных моделей турбулентности вместо уравнения для скорости диссипации используется уравнение для псевдозавихренности $\omega = k/\varepsilon$, которая имеет размерность частоты и характеризует величину скорости диссипации, приходящуюся на единицу кинетической энергии турбулентности. Модель k–ω, разработанная Д. Уилкоксом [1]), не требует введения специальных пристеночных функций, но оказывается чувствительной к свободной турбулентности.

Разработка k–ω модели стала крупным успехом в моделировании пристенных течений при больших продольных перепадах давления.

В целом, двухпараметрические модели турбулентности характеризуются комплексом $z = k^m l^n$, дающим представление о том, относительно каких величин записываются уравнения переноса. Одно уравнение обычно записывается относительно кинетической энергии турбулентности, а другое — для переменной z. Турбулентная вязкость вычисляется по формуле $\nu_t \sim k^{1/2-m/n} z^{1/n}$, причем $m = 3/2$ и $n = -1/2$ для k–ε модели.

В отличие от моделей k–ε и k–ω, модель k–l, развиваемая в работе Дж. Ротты [2]), не получила широкого распространения в вычислительной практике.

---

[1]) *Wilcox D. C.* Multiscale model for turbulent flows // AIAA Journal. 1988. V. 26, No. 11. P. 1311–1320.

[2]) *Rotta J. C.* A family of turbulence models for three-dimensional thin shear layers // Proceedings of Symposium on Turbulent Shear Flows, 18–20 April 1977, Pennsylvania, USA. 1977. V. 1. P. 10.27–10.34.

Конкуренцию двухпараметрическим моделям составляют эффективные и достаточно универсальные однопараметрические модели, такие как модель Спаларта–Аллмараса [1] и ν_t–92 модель [2], являющейся развитием модели Секундова [3], которые используют уравнение переноса турбулентной вязкости или величины с ней связанной, а также двухзонная модель Ментера [4].

Несмотря на то, что модель Спаларта–Аллмараса (используется сокращенное наименование SA-модель) и модель ν_t–92 требуют решения одного дополнительного уравнения для турбулентной вязкости, они воплощают новый класс однопараметрических моделей, в которых нет необходимости вычислять длину пути смешения, связанную с локальной толщиной слоя, характеризуемого бо́льшими значениями касательных напряжений.

В исходных версиях однопараметрических моделей, использующих длину пути смешения, турбулентная вязкость вычисляется по формуле $\nu_t = lk^{1/2}$. Кинетическая энергия турбулентности находится из решения соответствующего дифференциального уравнения, а масштаб турбулентности — из алгебраических соотношений, как и в случае моделей нулевого порядка.

В оригинальной форме модель Спаларта–Аллмараса представляет собой низкорейнольдсовую модель, которая требует надлежащего разрешения пристеночной зоны пограничного слоя. Вместе с тем, модель Спаларта–Аллмараса используется и в сочетании с методом пристеночных функций в случае применения достаточно грубой сетки. Во многих публикациях отмечается, что градиенты переносимой переменной в модели Спаларта–Аллмараса намного меньше, чем градиенты искомых функций в моделях k–ε и k–ω. Это делает модель Спаларта–Аллмараса менее чувствительной к численным ошибкам в расчетах на неструктурированных сетках в пограничном слое.

Модель Спаларта–Аллмараса разработана для применения в аэрокосмической отрасли и широко используется для решения задач дозвуковой аэродинамики и турбомашиностроения при расчетах пограничных слоев, подверженных неблагоприятным градиентам давления. Для

---

[1] *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. No. 92–0439.

[2] *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1993. № 4. С. 69.

[3] *Секундов А.Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости и анализ плоских не автомодельных течений // Известия АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114–127.

[4] *Menter F.R.* Zonal two-equation k–ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. No. 93–2306.

расширения границ применимости SA-модели используются поправки на кривизну линий тока и вращение [1]).

Модель Ментера (Shear Stress Transport, SST) объединяет достоинства k–ω и k–ε моделей турбулентности. В модели Ментера во внутренней области используется модифицированная k–ω модель, предназначенная для описания крупномасштабных когерентных структур, а во внешней — стандартная k–ε модель, ориентированная на разрешение мелкомасштабной турбулентности. В модели Ментера k–ε модель переформулируется в терминах k и ω, а затем в полученные уравнения добавляется специальная функция, отвечающая за переключение с одной модели турбулентности на другую. По мере удаления от стенки и приближения к границе пограничного слоя функция перехода стремится к нулю, а вблизи стенки принимает значение единицы.

Выражение для вихревой вязкости в исходном варианте модели Ментера включает модуль завихренности. В модифицированном варианте модели [2]) вместо него используется инвариант тензора скоростей деформаций (эта поправка аналогична поправке Като–Лаундера в k–ε модели турбулентности).

Модели переноса компонент рейнольдсовых напряжений (многопараметрические модели) используются с тех случаях, когда существенна разница в переносе отдельных компонент тензора напряжений Рейнольдса. Такой подход предполагает решение уравнений относительно всех компонент тензора напряжений Рейнольдса и позволяет без дополнительных эмпирических предположений учесть кривизну линий тока, влияние сил плавучести, закрутку потока. Вопрос о перспективах моделей турбулентности, использующих уравнения переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса, остается во многом открытым. Наряду с нерешенностью проблемы замыкания уравнений Рейнольдса, принципиальной в практическом плане является вычислительная трудность реализации этих моделей.

Для уменьшения количества решаемых уравнений находят применение упрощенные модели переноса рейнольдсовых напряжений, в частности, алгебраические модели, и многопараметрические модели.

Среди многопараметрических моделей следует отметить четырехпараметрическую v^2–f модель [3]), которая включает уравнения k–ε модели, уравнение для нормальной к линии тока компоненты тензора

---

[1]) *Dacles-Mariani J., Zilliac G.G., Chow J.S., Bradshaw P.* Numerical/experimental study of a wingtip vortex in the near field // AIAA Journal. 1995. V. 33, No. 9. P. 1561–1568.

[2]) *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. Turbulence, Heat and Mass Transfer. New York, Begell House, 2003. P. 625–632.

[3]) *Durbin P.A.* Near-wall turbulence closure modeling without damping functions // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1991. V. 3, No.1. P. 1–13.

напряжений Рейнольдса, а также уравнение эллиптического типа для релаксационной функции. Имеются и другие модели с несколькими уравнениями, например, LRR-модель [1]) (модель получила название по первым буквам фамилий ее авторов).

Длительный период успешного применения дифференциальных моделей турбулентности для решения практических задач дает достаточные основания для вывода о возможном исчерпании того научного и практического потенциала, рамки которого очерчены постулатами Рейнольдса (хотя, возможно, опасения относительно исчерпания ресурсного потенциала метода Рейнольдса являются несколько преувеличенными).

Критика ограниченности возможностей метода Рейнольдса сосредоточена на процедуре осреднения, трактуемой как осреднение по всем масштабам и применяемой при выводе уравнений для первых, вторых и моментов более высокого порядка. В то же время, процесс моделирования отдельных членов этих уравнений ориентирован не на весь спектр масштабов, а лишь на тот или иной их интервал.

Остаются не решенными в полном объеме проблема моделирования пристенной турбулентности, проблема описания перехода от ламинарного режима течения к турбулентному и обратного перехода от турбулентного режима к ламинарному (реламинаризация потока) под влиянием сильного благоприятного перепада давления, учет влияния продольной кривизны поверхности на характеристики турбулентного пограничного слоя.

Наряду с традиционными исследованиями, направленными на усовершенствование существующих и разработку новых моделей, большое внимание уделяется проблеме тестирования и определению границ применимости существующих моделей. Международные программы, направленные на тестирование полуэмпирических моделей турбулентности, координируются Стэнфордским университетом, комиссией ЕС по развитию научных исследований и Европейским сообществом по течениям, турбулентности и горению (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion, ERCOFTAC).

Надежда на создание универсальной модели турбулентности постепенно заменяется растущей уверенностью в том, что формулировка соответствующей теории требует значительно лучшего понимания физики турбулентных течений.

Нелинейные модели. Наглядность, относительная простота, вычислительная эффективность и приемлемость для широкого круга свободных и пристенных турбулентных течений (когда основное влияние на среднее течение оказывает лишь одна из компонент тензора рей-

[1]) *Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // Journal of Fluid Mechanics. 1975. V. 68. P. 537–566.

нольдсовых напряжений) обусловили широкое распространение моделей турбулентной вязкости.

Концепция турбулентной вязкости предполагает, что перенос количества движения происходит так же, как и перенос за счет молекулярного движения. Основной недостаток концепции Буссинеска состоит в предположении об изотропности турбулентной вязкости. Такое допущение является упрощением, имеющим ограниченную пригодность для интерпретации сложных течений. Концепция Буссинеска неприемлема для описания течений, в которых имеются зоны с отрицательной турбулентной вязкостью.

Наряду с моделями турбулентности, основанными на концепции Буссинеска, находят применение нелинейные модели турбулентной вязкости [1]) (Non-Linear EVM, NLEVM), а также модели, в которых коэффициент турбулентной вязкости принимается различным по координатным направлениям (анизотропия турбулентной вязкости). В этих моделях предполагается нелинейная связь между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций. Их недостатки заключаются в недостаточной апробации и отсутствии соответствующей информационной поддержки.

Нелинейные модели вихревой вязкости имеют ту же область применения, что и модели IASM, но характеризуются медленной сходимостью, в связи с чем в вычислительной практике используются сравнительно редко. По сравнению с линейными моделями, они приводят к увеличению стоимости расчетов приблизительно на 20 %.

Вычислительные ресурсы. Один их необходимых этапов совершенствования дифференциальных моделей турбулентности состоит в устранении или существенном уменьшении влияния эффектов численной диффузии в расчетах циркуляционных течений. Утверждение о том, что моделирование турбулентности неотделимо от проблем численной реализации моделей турбулентности, в настоящее время является очевидным.

С вычислительной точки зрения, модель Спаларта–Аллмараса представляется самой экономичной, поскольку использует одно дополнительное уравнение переноса.

Стандартная k–ε модель требует несколько бóльших вычислительных ресурсов, решая два дополнительных уравнения переноса — для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Из-за дополнительных условий и функций в уравнениях переноса, а также в связи с большей степенью нелинейности, Realizable k–ε модель требует больше ресурсов, чем стандартная k–ε модель. Подобно k–ε модели, модель k–ω также является двухпараметрической и требует некоторых вычислительных усилий.

[1]) *Pope S. B.* A more general effective-viscosity hypothesis // Journal of Fluid Mechanics. 1975. V. 72. P. 331–340.

Помимо временны́х затрат на итерационный процесс, выбор модели турбулентности влияет на сходимость численного решения. Например, стандартная k–ε модель в некоторых случаях является сверхдиффузионной, в то время как RNG-модель разработана таким образом, что турбулентная вязкость уменьшается при резких изменениях напряжений. Поскольку диффузия положительно влияет на сходимость численного решения, то RNG-модель более восприимчива к неустойчивости решения в стационарных задачах. Однако это не является недостатком RNG-модели, так как данная характеристика делает ее более отзывчивой к важной физической нестабильности, такой как зависящие от времени потери турбулентных вихрей.

По сравнению с двухпараметрическими моделями, например, моделями k–ε и k–ω, модели переноса рейнольдсовых напряжений требуют дополнительной памяти и процессорного времени из-за увеличения числа уравнений и сильной взаимосвязи между компонентами рейнольдсовых напряжений и средним течением. В среднем, модели RSM требуют на 50–60 % времени больше, чем двухпараметрические модели турбулентности, и на 15–20 % больше оперативной памяти.

Современные подходы к описанию турбулентности. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых при помощи той или иной полуэмпирической модели турбулентности, оказывается неэффективным при моделировании турбулентных течений с нестационарными крупномасштабными вихревыми структурами, свойства которых зависят от конкретных граничных условий и геометрических характеристик течения.

Хотя возможности усовершенствования полуэмпирических моделей турбулентности еще не до конца исчерпаны (хотя это и ставится многими под сомнение), существенный прогресс в этой области представляется сомнительным, а создание универсальной полуэмпирической модели турбулентности, пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений — неразрешимой задачей. Возросшие возможности вычислительной техники заставили изменить оценку возможностей классической теории турбулентности и стимулировали поиск и разработку новых подходов к моделированию турбулентных течений.

Рост ресурсов вычислительной техники и неудовлетворенность результатами, получаемыми на основе подхода Рейнольдса, обозначили интерес к методам прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) турбулентных течений на основе полных уравнений Навье–Стокса. Фундаментальной основой для использования уравнений Навье–Стокса служит то обстоятельство, что пространственно-временные масштабы турбулентности существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений.

Несмотря на дороговизну расчетов, на основе DNS удалось получить ряд интересных результатов, среди которых следует отметить

моделирование однородной изотропной турбулентности при умеренных числах Рейнольдса, моделирование инерционной подобласти спектра двумерной турбулентности и энергосодержащей области спектра трехмерной турбулентности, а также установление различий между двумерной и трехмерной турбулентностью. В двумерном случае каскадный процесс передачи энергии осуществляется вверх по шкале волновых чисел (в направлении к более крупным вихрям), а в трехмерном — в обратном направлении (от крупных вихрей к мелким).

Характерной особенностью течений, исследованных в рамках DNS, является их пространственная ограниченность (течения в каналах и пограничных слоях) и сравнительно небольшие числа Рейнольдса. Применению DNS к течениям с геофизическими масштабами препятствует высокая стоимость расчетов. Согласно прогнозу Ф. Спаларта [1], использование DNS для решения прикладных задач (например, для расчета обтекания самолета) станет возможным к 2080 г.

Ограниченность DNS послужила стимулом для развития другого направления — метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), хотя в действительности речь идет о моделировании вихрей с подсеточными масштабами (с масштабами, меньшими размера шага сетки). Основная идея LES заключается в формальном математическом разделении крупных и мелких вихревых структур посредством той или иной операции, например, операции фильтрации. В качестве среднего значения функции в точке берется среднее значение этой функции по объему ячейки расчетной сетки. Чем больше объем осреднения (шаг сетки или ширина фильтра), тем больше теряется информации о процессах подсеточного переноса.

Введение обобщенного фильтра восходит к работе А. Леонарда [2]. Находят также применение гауссовский (Gauss filter) и коробочный (box filter) фильтр, а для расчетов на основе спектральных методов — фильтр Фурье (Fourier filter).

Операция осреднения с фильтром приводит к уравнениям, содержащим средние значения произведений составляющих скорости и члены, содержащие скорости мелкомасштабных пульсаций, в том числе, тензор напряжений для этих пульсаций (тензор подсеточных напряжений). Тензор, учитывающий влияние мелкомасштабных вихрей на эволюцию крупномасштабных вихревых структур, моделируется, что и составляет суть методики подсеточного моделирования.

Подсеточные модели являются более универсальными по сравнению с одноточечными моделями замыкания, используемыми в подходе Рейнольдса, поскольку мелкомасштабная турбулентность по своей

[1] *Spalart P.R.* Strategies for turbulence modelling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21, No. 3. P. 252–263.

[2] *Leonard A.* Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows // Advances in Geophysics. 1974. V. 18. P. 237–248.

природе представляется более универсальной, чем крупномасштабная турбулентность. Однако удовлетворительная точность схем замыкания для мелкомасштабной турбулентности достигается лишь тогда, когда разделение течения на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие не оказывает заметного влияния на эволюцию крупномасштабных вихревых структур.

Истоки LES восходят к исследованиям метеорологов, посвященным численному моделированию циркуляции воздуха в атмосфере с целью описания деталей крупномасштабных вихревых движений [1]). При этом статистическое влияние структур с подсеточными масштабами на крупномасштабные вихри учитывалось заданием турбулентной вязкости, выбиравшейся на основе эмпирических данных (в простейшем случае турбулентная вязкость считалась постоянной, не зависящей от пространственных координат и времени). Другие примеры практического использования LES включали моделирование течения в канале [2]).

Наиболее простой и во многих случаях наиболее предпочтительной в вычислительном плане является модель Смагоринского [3]). Турбулентная вязкость определяется средним значением скорости диссипации, приходящейся на единицу объема. Величина скорости диссипации непосредственно не известна. Однако в случае, если инерционный интервал спектра выражен достаточно отчетливо, скорость диссипации выражается через среднюю скорость деформации.

Нетрудно провести аналогию между моделью Прандтля, используемой для замыкания уравнений Рейнольдса, и подсеточной моделью Смагоринского. Направление, связанное с разработкой дифференциальных моделей подсеточного масштаба, не получило широкого развития в рамках LES в связи с трудностями вычислительной реализации и необходимостью калибровки модельных коэффициентов.

Согласно оценкам Спаларта, перспективы широкомасштабного применения метода LES для решения прикладных задач реализуются к 2045 г.

Достоинства RANS (высокая точность и экономичность в области присоединенного пограничного слоя) и LES (универсальность и приемлемые вычислительные затраты в отрывной области потока) сочетает комбинированный подход, получивший наименование моделирования

---

[1]) *Deardorff J. W.* The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence // Journal of Fluids Engineering. 1973. V. 9. P. 429–438.

[2]) *Deardorff J. W.* A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1970. V. 41. P. 453–480.

[3]) *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review. 1963. V. 91, No. 3. P. 99–165.

отсоединенных вихрей [1]) (Detached Eddy Simulation, DES). Выбор того или иного подхода к описанию турбулентности (RANS или LES) производится автоматически в зависимости от соотношения между локальным размером вычислительной сетки и характерным линейным масштабом турбулентности в рассматриваемой точке потока. Использование уравнений Рейнольдса для описания течения в пограничном слое позволяет снять жесткие ограничения на размеры ячеек сетки в пристенной области в направлении, параллельном стенке.

Вплоть до точки отрыва пограничный слой описывается с помощью уравнений Рейнольдса. Решения, полученные в рамках уравнений Рейнольдса и LES не совпадают вне области отрыва, поскольку в силу глобальной нестационарности решения и эллиптических эффектов течение вверх по потоку от точки отрыва зависит от характера его эволюции вниз по потоку. Модель турбулентности, лежащая в основе DES, влияет на положение точки отрыва, а следовательно, и на точность решения в целом.

Конкретные реализации подхода основаны на использовании для замыкания уравнений Рейнольдса модифицированной модели турбулентной вязкости Спаларта–Аллмараса и модели Ментера.

В области отрыва потока модель турбулентности переходит в дифференциальную подсеточную модель, которая при выполнении условия равновесия (генерация равняется диссипации) аналогична подсеточной модели Смагоринского.

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для широкого круга отрывных турбулентных течений демонстрируют высокую эффективность и экономичность DES. Наряду с этим, не совсем ясными остаются вопросы об адекватности DES в области перехода от уравнений Рейнольдса к LES (так называемая серая область). Имеются также и другие реализации комбинированных подходов, например, подход Hybrid RANS/LES, которые в некоторых случаях оказываются более предпочтительными по сравнению с DES.

Следует подчеркнуть, что DNS, LES и DES являются принципиально трехмерными (даже в случае двумерной геометрии) нестационарными подходами. Возможность расчета флуктуирующих параметров потока, предоставляемая современными подходами к моделированию турбулентных потоков, позволяет прийти к глубокому пониманию природы турбулентности.

Широкое распространение получила визуализация течения, которая улучшила понимание структуры турбулентных течений.

Графическое представление результатов расчетов нестационарных течений продвинуто на высокий уровень совершенства. Компьютерная

[1]) *Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M., Allmaras S. R.* Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, August 1997, Ruston, USA. P. 137–148.

мультипликация удивительно повторяет мультипликацию, полученную киносъемкой визуализированного течения в лабораторных условиях. При этом исследователь освобождается от многочисленных ограничений, связанных с лабораторными исследованиями.

К настоящему времени накоплен обширный опыт по применению LES и DES для решения широкого круга сложных прикладных задач, а сами подходы включаются в качестве одной из опций для моделирования турбулентности в наиболее известные коммерческие CFD-пакеты (например, Fluent, Ansys CFX, Star-CD). Важную роль в развитии современных методов моделирования турбулентности играют исследования, поддерживаемые рамочными программами Европейского союза по научному и технологическому развитию (6th and 7th EU Framework Programmes for Research and Technological Development) в рамках различных международных проектов при сотрудничестве ведущих европейских университетов и коммерческих фирм, в частности, в рамках проектов DESider (Detached Eddy Simulation for Industrial Aerodynamics), FLOMANIA (Flow Physics Modelling — An Integrated Approach), PROBAND (Improvement of fan broadband noise prediction), целями которых является внедрение современных подходов к численному моделированию турбулентных течений в CFD-пакеты ведущих европейских аэрокосмических компаний. Различные моменты, связанные с использованием и численной реализацией LES, а также тестированием соответствующих моделей, рассматриваются в проектах HPC-EUROPA (параллелизация DNS/LES кода, связанного с эйлерово-лагранжевым подходом к описанию турбулентных двухфазных течений), TIMECOP-AE (Towards Innovative Methods for Combustion Prediction in Aero-Engines), FarWake (взаимодействие вихрей с поверхностью), VortexCell2050 (вихревые ячейки), WALLTURB (моделирование пристеночной турбулентности).

Имеются также узкоспециализированные научные программы и проекты, например, ICAS-GT (Internal Cooling Air Systems for Gas Turbines), поддерживаемые промышленными корпорациями, цели которых заключается в тестировании различных подходов к моделированию турбулентности и их применении в конкретной предметной области.

Тем не менее, достигнутые успехи не означают, что LES и DES решают все стоящие перед исследователями проблемы и являются готовыми инструментами для решения инженерных задач. Для этого предстоит решить ряд методических вопросов, в частности, разработать методы построения и разумные критерии оценки качества сеток, рациональные способы задания начальных и граничных условий, а также ряд других. В многочисленных расчетах опробован широкий круг подсеточных моделей, фильтров, граничных условий и конечно-разностных схем. Несмотря на это, не ясны ни оптимальный выбор подсеточной модели, ни обоснование выбора такого варианта. Нет также универсальных пристеночных функций, обеспечивающих уменьшение

количества узлов вблизи стенки, в связи с чем LES затруднительно использовать для расчетов течений с малыми отрывными зонами и точками перехода, например, для расчета обтекания профиля под углом атаки.

Ряд фундаментальных вопросов, важных для теоретического обоснования LES, поднимается и обсуждается в статье С. Поупа [1]. Не на все из затронутых вопросов имеются ответы, а ряд из них носит дискуссионный характер.

Исследования, направленные на более глубокое осмысление природы и механизмов турбулентности, разработку современных подходов к численному моделированию турбулентных течений, а также решение технических вопросов, связанных с их практическим использованием, продолжаются.

[1] *Pope S. B.* Ten questions concerning the large-eddy simulation of turbulent flows // New Journal of Physics. 2004. V. 6. Paper No. 35. 24 p.

Глава 1

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и достигнутые успехи в области разработки эффективных численных методов и соответствующего математического обеспечения, проблема моделирования турбулентности остается одной из наиболее сложных и важных проблем механики жидкости и газа. В отличие от ламинарных течений, расчет которых благодаря достигнутым успехам стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик турбулентных течений по ряду причин (трехмерный характер течения, стохастическая природа и широкий пространственно-временной спектр масштабов) остается, скорее, искусством, чем строгой наукой.

В данной главе обсуждаются достоинства и недостатки различных методов моделирования турбулентных течений (прямое численное моделирование, решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, моделирование крупных вихрей, моделирование отсоединенных вихрей, квазипрямое численное моделирование и ряд других комбинированных подходов), а также проблемы, возникающие при их численной реализации.

1.1. Характеристики турбулентных течений

Один из наиболее часто применяемых на практике методов исследования стационарной турбулентности заключается в изучении энергетического спектра и пространственно-временны́х корреляционных функций.

1.1.1. Масштабы турбулентного движения. Линейный и временной масштабы энергосодержащих вихрей определяются локальными характеристиками турбулентного потока

$$l \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \quad \tau \sim \frac{l}{u'} = \frac{l}{k^{1/2}},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности, ε — скорость ее диссипации.

Наименьшие масштабы турбулентного движения намного превышают среднюю длину молекулярного пробега и соответствуют колмогоровским масштабам длины, времени и скорости

$$l_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad \tau_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad v_k = (\nu\varepsilon)^{1/4}.$$

Интегральный масштаб длины, соответствующий размеру энергосодержащих вихрей, связан с колмогоровским масштабом длины $l/l_k \sim \mathrm{Re}^{3/4}$, где $\mathrm{Re} = lk^{1/2}/\nu$. Для турбулентного пограничного слоя $\mathrm{Re} > 10^4$ и $l \sim 0{,}1\delta$, где δ — толщина пограничного слоя, поэтому вне вязкой пристеночной зоны $l_k \sim 10^{-4}\delta$.

В теории турбулентности широко используется также тэйлоровский микромасштаб длины [41]

$$\lambda = \frac{\overline{u'^3}}{\overline{(\partial u'/\partial x)^2}}.$$

Для локально-изотропной турбулентности имеет место соотношение

$$\varepsilon = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} = 15\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}.$$

Полагая $k \sim \overline{u'^2}$, получим, что $\lambda \sim \left(l\, l_k^2\right)^{1/3}$ и $l/\lambda \sim \mathrm{Re}^{1/2}$.

При высоких числах Рейнольдса существует четкое разделение линейных масштабов $l_k \ll \lambda \ll l$. Тэйлоровский микромасштаб представляет собой комбинированную характеристику, зависящую как от свойств крупномасштабных, так и мелкомасштабных вихрей. В отличие от масштабов l_k и l, масштаб λ не идентифицируется любым значащим диапазоном размеров вихрей. Несмотря на то, что тэйлоровский микромасштаб не является значимым масштабом длины, результаты численного моделирования часто выражается в терминах числа Рейнольдса, построенного с его помощью

$$\mathrm{Re}_\lambda = \frac{\lambda k^{1/2}}{\nu} = \left(\frac{l_\varepsilon k^{1/2}}{\nu}\right)^{1/2},$$

где $l_\varepsilon = k^{3/2}/\varepsilon$. При этом $\mathrm{Re}_\lambda \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ и $l \sim l_\varepsilon$. Величина l_ε представляет собой масштаб длины диссипации (характерный масштаб длины сдвигосодержащего движения), который неявно используется в двухпараметрических моделях турбулентности.

1.1.2. Спектральная плотность. Представим поле скалярной величины $f(\mathbf{r}, t)$, являющейся функцией пространственных координат

и времени, в виде интеграла Фурье

$$f(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\boldsymbol{\kappa},t)\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}\right)d\boldsymbol{\kappa}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\kappa},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\mathbf{r},t)\exp\left(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}\right)d\mathbf{r}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{\kappa}$ — волновой вектор.

Считая поле турбулентности стационарным, определим трехмерный энергетический спектр случайного векторного поля

$$F(\boldsymbol{\kappa})=\left\langle\left|\widehat{f}(\boldsymbol{\kappa})\right|^2\right\rangle.$$

В теории турбулентности используется энергетический спектр $E(\kappa)$, который характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора независимо от его направления

$$E(\kappa)=\int\limits_{|\boldsymbol{\kappa}|}F(\boldsymbol{\kappa})\,d\boldsymbol{\kappa}.$$

Используя сферическую систему координат, получим

$$E(\kappa)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}F(\boldsymbol{\kappa})\kappa^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Свойства изотропной турбулентности являются инвариантными по отношению к вращению, поэтому $E(\kappa)=4\pi\kappa^2F(\kappa)$. Если для однородного изотропного поля скалярной величины $E(\kappa)\sim\kappa^a$, то в трехмерном случае $F(\kappa)\sim\kappa^{a-2}$, а в одномерном $F(\kappa)\sim\kappa^a$, где a — постоянная.

Поскольку $E(\kappa)\,d\kappa$ представляет собой кинетическую энергию турбулентности, содержащуюся между волновыми числами κ и $\kappa+d\kappa$, то спектральное представление кинетической энергии турбулентности имеет вид

$$k=\int\limits_0^{\infty}E(\kappa)\,d\kappa.$$

Спектральная плотность диссипации определяется соотношением

$$D(\kappa)=2\nu\kappa^2E(\kappa).$$

Значение скорости диссипации находится при помощи интегрирования спектральной плотности $E(\kappa)$.

Схематически распределение кинетической энергии турбулентности по волновым числам приводится на рис. 1.1.

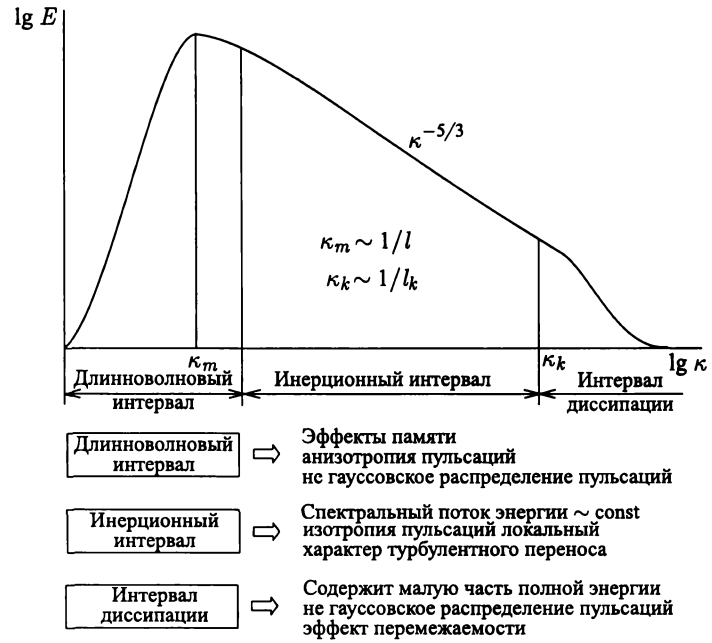


Рис. 1.1. Спектральная плотность кинетической энергии турбулентности

Для локально-изотропной турбулентности имеет место закон Колмогорова–Обухова, описывающий прямолинейный участок волнового спектра [41]

$$E(\kappa) = C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3},$$

где C_k — постоянная Колмогорова.

Для представления спектральной плотности в явном виде используется соотношение Кармана

$$E(\kappa) = \frac{a\kappa^4}{(b + \kappa^2)^{17/6}},$$

где $a = 2.682$, $b = 0.417$. Постоянные a и b выбираются из условия нормировки. При $\kappa \to \infty$ соотношение Кармана сводится к закону Колмогорова–Обухова $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$, а при $\kappa \to 0$ приводит к закону $E(\kappa) \sim \kappa^4$ (рис. 1.2).

При высоких числах Рейнольдса область турбулентных пульсаций условно разделяется на три интервала (рис. 1.3).

1. Область энергосодержащих вихрей (область энергии), размеры которых l_1 соизмеримы с характерным масштабом течения. В данной области сосредоточена основная доля (примерно 80–90 %) полной

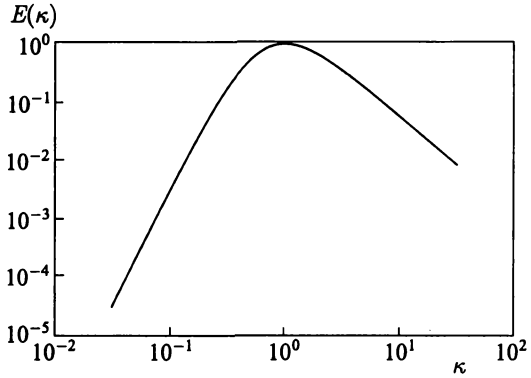


Рис. 1.2. Спектральная плотность кинетической энергии турбулентности, описываемая соотношением Кармана

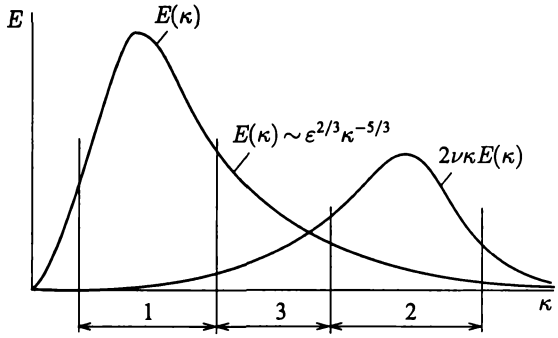


Рис. 1.3. Интервал энергии (участок 1), интервал диссипации (участок 2) и инерционный интервал (участок 3)

энергии

$$k = \int_0^\infty E(\kappa)\, d\kappa = \int_0^{\kappa_m} E(\kappa)\, d\kappa.$$

Крупномасштабная турбулентность определяется, в основном, силами инерционной природы. Силы вязкости играют второстепенную роль, и в ряде случаев ими пренебрегается.

2. Область диссипативных вихрей, имеющих размер l_2, в которой осуществляется диссипация кинетической энергии в тепло вследствие действия молекулярной вязкости (область диссипации). В данной области сосредоточена основная доля полной диссипации

$$\varepsilon = \int_0^\infty D(\kappa)\, d\kappa = 2\nu \int_0^\infty \kappa^2 E(\kappa)\, d\kappa = 2\nu \int_{\kappa_m}^\infty \kappa^2 E(\kappa)\, d\kappa,$$

где κ_m — промежуточное значение волнового числа, лежащего за интервалом энергии и перед интервалом диссипации.

3. При высоких числах Рейнольдса между областями 1 и 2 находится инерционная область, характеризуемая масштабами $l_2 < l < l_1$, в которой турбулентность, как правило, однородна и изотропна, а спектральная плотность связана с частотой пульсаций степенным законом Колмогорова–Обухова. В инерционной области энергия не продуцируется и не диссипирует, а только передается к бóльшим волновым числам.

Коротковолновая область спектра соответствует масштабам диссипации кинетической энергии турбулентности в тепло под воздействием вязкости и содержит сравнительно малую часть кинетической энергии турбулентности. Турбулентные пульсации в этой области имеют сложную статистическую структуру и характеризуются значительными по величине коэффициентами эксцесса (4-й момент) с существенно негауссовским распределением. При моделировании турбулентных течений в рамках метода статистических моментов их влияние на процессы турбулентного переноса полагается пренебрежимо малым и учитывается только сток кинетической энергии турбулентности. В случае развитой турбулентности скорость вязкой диссипации приблизительно равняется спектральному потоку кинетической энергии турбулентности, и для ее определения не требуется рассмотрение сложной статистической структуры мелкомасштабных пульсаций.

Статистические свойства пульсаций в инерционном интервале описываются равновесной (гауссовской) функцией плотности вероятности, а движение жидких частиц в поле изотропной турбулентности подобно броуновскому движению.

Предположение о том, что скорость диссипации является единственным размерным параметром потока, определяющим свойства турбулентности в инерционном интервале, в действительности нарушается [34, 35]. Эксперименты свидетельствуют о флуктуационном поведении скорости диссипации, характеризующимся значительными коэффициентами эксцесса, что отражает перемежающийся характер течения. Однако перемежаемость, в основном, сосредоточена в области малых (диссипативных) масштабов, а соответствующие им пульсации содержат малую часть кинетической энергии турбулентности и не оказывают определяющего влияния на процессы турбулентного переноса.

Интервал энергии, соответствующий длинноволновым пульсациям, напротив, содержит основную часть энергии турбулентности и определяет характер турбулентного переноса. Крупномасштабные вихревые структуры характеризуются сравнительно бóльшим временем релаксации и содержат информацию о предыстории и структуре среднего течения (эффекты памяти). В этой области функция плотности вероятности является существенно негауссовской и характеризуется значительными по величине коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Распределения пульсационных параметров в интервале энергии и инерционном интервале спектра представляют основной объект исследования в задачах моделирования турбулентных течений.

Сложная статистическая структура крупномасштабных вихревых образований с одной стороны, и их определяющая роль в динамике турбулентных течений с другой, стимулируют развитие методов описания турбулентности, основанных на точном разрешении крупных вихрей с привлечением параметризаций для учета мелкомасштабных пульсаций.

1.1.3. Корреляционные функции. Пространственная корреляционная функция представляет собой корреляцию функции f для двух точек, смещенных относительно друг друга на расстояние $\mathbf{r}$, в один и тот же момент времени

$$R(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle .$$

Корреляция для точек, удаленных друг от друга на расстояние r, представляет собой меру интенсивности вихрей, размер которых в направлении вектора $\mathbf{r}$ больше его абсолютной величины (мелкие вихри не вносят вклада в корреляцию).

Временна́я корреляционная функция представляет собой корреляцию функции f, соответствующую задержке времени τ, в одной и той же точке пространства

$$R(\tau) = \langle f(t) f(t+\tau) \rangle .$$

При $u'/\overline{u} \ll 1$ форма вихрей существенно не изменяется после прохождения данной точки пространства (гипотеза Тэйлора щ замороженной турбулентности). В этом случае временна́я корреляция совпадает с пространственной корреляцией для рассматриваемой точки и точки, сдвинутой на расстояние $r = \overline{u}\tau$ в направлении оси x [41].

Временна́я корреляция представляет собой четную функцией, если турбулентное течение статистически стационарно. Пространственная корреляция может быть несимметричной. Несимметрия корреляции означает, что турбулентность существенно изменяется на расстоянии r.

При исследовании сноса вихрей средним потоком используются смешанные корреляции по пространству и времени. Метод исследования развития вихрей, переносимых средним течением, состоит в сравнении пространственно-временны́х корреляций, соответствующих запаздыванию во времени τ и сдвигу по пространству $\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau$ в направлении средней скорости, с исходной пространственной корреляцией.

Трехмерный спектр связан с пространственной корреляцией при помощи теоремы Хинчина

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r}) \exp\left(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}\right) d\mathbf{r}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$R(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r})\, d\boldsymbol{\kappa}.$$

Другой функцией, представляющей существенный интерес для теории турбулентности, является структурная функция 2-го порядка

$$D_2(r) = \left\langle [f(x) - f(x+r)]^2 \right\rangle.$$

Структурная функция связана с корреляционными функциями и спектральной плотностью при помощи соотношения

$$D_2(r) = 2\,[R(0) - R(\tau)] = 2\int E(\varkappa)\,[1 - \exp(-i\varkappa r)]\, d\varkappa.$$

Практическое значение приведенных соотношений состоит в том, что в экспериментальных или теоретических исследованиях изучается либо спектр, либо корреляционные функции, поскольку они содержат одинаковую информацию. На практике сравнительно легко измеряется частотный спектр или временна́я корреляция, но невозможно непосредственно измерить спектр по волновым числам, представляющий собой преобразование Фурье от пространственной корреляции.

1.2. Основные и комбинированные подходы

Исходная предпосылка математического моделирования турбулентных течений заключается в предположении о приемлемости уравнений Навье–Стокса для интерпретации турбулентных течений и предсказания их мгновенных характеристик (рассматриваются статистические свойства ансамбля течений при макроскопически одинаковых внешних условиях). Допущение о применимости уравнений Навье–Стокса для описания турбулентного движения подтверждается многочисленными исследованиями [34, 35].

Среди методов моделирования турбулентных потоков обычно выделяют прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS), моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier–Stokes, RANS). Имеются также комбинированные подходы, сочетающие в себе те или иные черты DNS, RANS и LES, например, метод моделирования отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES), и ряд других, не имеющих должного физического обоснования и потому не получивших широкого распространения.

Схематически классификация методов моделирования турбулентных течений приводится на рис. 1.4.

Прямое численное моделирование предполагает решение полных (нестационарных и трехмерных) уравнений Навье–Стокса (без какого-

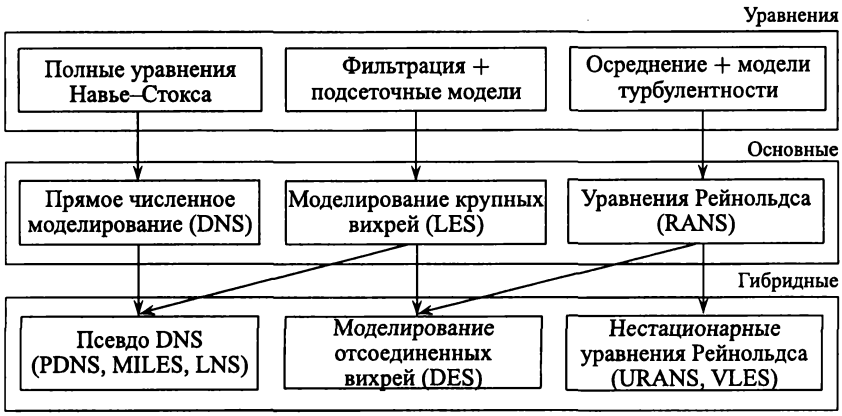


Рис. 1.4. Методы моделирования турбулентных течений

либо предварительного осреднения). При таком подходе разрешаются все масштабы турбулентного движения, что позволяет рассчитать амплитудно-частотные и средние характеристики потока при помощи осреднения по достаточно длинному (статистически представительному) интервалу времени. Для использования DNS требуются мощные вычислительные ресурсы, а возможности его применения ограничиваются расчетами течений с довольно простой геометрией и сравнительно малыми числами Рейнольдса (порядка $10^3 \div 10^4$).

Использование осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса требует намного меньших вычислительных ресурсов. В рамках RANS моделируется вклад в среднее движение всех масштабов турбулентности. Данный подход успешно применяется в практических расчетах. Однако используемые для замыкания уравнений Рейнольдса модели турбулентности не обладают приемлемой универсальностью, а потому не могут применяться для решения широкого круга прикладных задач. Это относится к течениям с отрывом потока и ряду других течений, для которых характерно наличие относительно устойчивых трехмерных и нестационарных структур с размерами порядка макромасштаба потока (такие структуры называются когерентными, а течения, в которых они играют существенную роль — автоколебательными). К числу примеров автоколебательных турбулентных течений относятся течение в следе за плохообтекаемым телом (дорожка Кармана), бафтинг (возникновение крупномасштабных колебаний скачка уплотнения при трансзвуковом обтекании крыла под определенным углом атаки) и другие.

Метод моделирования крупных вихрей является компромиссным вариантом между DNS и решением RANS. Данный подход ограничивается исследованием течений только в масштабах, превышающих некоторую заданную величину (ширину фильтра). В методе LES осу-

ществляется решение фильтрованных по пространству уравнений Навье–Стокса, и разрешается движение только крупных вихрей.

Размеры крупных вихрей определяются граничными условиями задачи (размеры самых крупных вихрей сопоставимы с характерным масштабом задачи). Крупномасштабные компоненты турбулентности образуются из среднего течения при преодолении вязких или рейнольдсовых напряжений.

Мелкие вихри (коротковолновая часть спектра) имеют более универсальную структуру и характеристики, которые определяются скоростью диссипации кинетической энергии и вязкостью, сравнительно слабо зависят от геометрии течения и внешних условий и моделируются при помощи моделей подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale, SGS), построенных на основе концепции вихревой вязкости или других рациональных приближений процессов переноса. На практике требуется применение достаточно мелких сеток, обеспечивающих разрешение крупных вихревых структур, лежащих вне инерционного интервала, удовлетворяющего закону «пяти третей».

Диапазон масштабов вихрей, представленных в турбулентном потоке, увеличивается с ростом числа Рейнольдса.

Метод моделирования отсоединенных вихрей представляет собой гибрид традиционных уравнений Рейнольдса, которые используются в пристеночной области (например, в области присоединенного пограничного слоя), где шага сетки недостаточно для разрешения крупных вихрей, и метода моделирования крупных вихрей, применяемого в отрывных зонах с характерными для них крупномасштабными вихревыми структурами.

Наряду с DNS и LES, находит применение метод псевдо- или квазипрямого численного моделирования (Pseudo или Quasi DNS, PDNS или QDNS), а также монотонный метод моделирования крупных вихрей (Monotonically Integrated LES, MILES), в которых подсеточные модели не используются, а диссипативные процессы вводятся при помощи специально сконструированных разностных схем [4, 79].

Подход, в котором решаются нестационарные уравнения Рейнольдса (Unsteady RANS, URANS), обычно рассматривается как обобщение метода RANS. Данный подход является более экономичным и менее чувствительным к сетке, чем LES или DES. Однако надежное теоретическое обоснование применимости URANS для описания турбулентных течений отсутствует (при выводе уравнений Рейнольдса используется осреднение по интервалу времени, который намного превышает характерные времена всех турбулентных пульсаций). Применение нестационарной формы уравнений Рейнольдса является оправданным при наличии внешних нестационарных воздействий (в случае нестационарных граничных условий).

Расчеты с использованием нестационарных уравнений Рейнольдса на довольно мелкой сетке позволяют разрешить крупномасштабные вихревые структуры и проследить их эволюцию во времени. В неко-

торых источниках метод URANS интерпретируется как упрощенный метод моделирования крупных вихрей (Very Large Eddy Simulation, VLES). Однако трактовка URANS как одной из модификаций LES не соответствует физической сущности этого метода.

В ряде других работ метод VLES трактуется несколько иначе. В отличие от RANS, в VLES используется тройное разложение мгновенных значений искомых функций на среднюю, некогерентную и когерентную составляющие, что ставит его в один ряд с подходом, рассмотренным в [6]. В вычислительной практике VLES используется для расчета течений с крупномасштабными когерентными вихревыми структурами, а также предсказания флуктуаций давления в закрученных потоках, например, в газовых горелках и форсунках. Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными измерений и расчетами, выполненными при помощью различных моделей турбулентности.

Трактовку различных подходов к моделированию турбулентности удобно пояснить графически, используя условное распределение кинетической энергии турбулентности по волновым числам (рис. 1.5), а также соотношения между разрешимой и моделируемой частями спектра в различных подходах (рис. 1.6).

Спектр кинетической энергии турбулентности характеризуется достаточно протяженным прямолинейным участком, описывающим закон «пяти третей» (инерционный интервал).

В то время как при решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса моделируется весь спектр масштабов, в методе

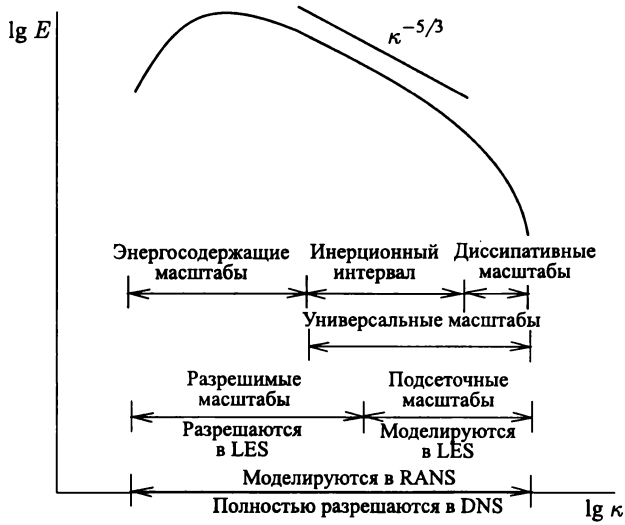


Рис. 1.5. Спектр кинетической энергии турбулентности и трактовка различных подходов к моделированию турбулентных течений

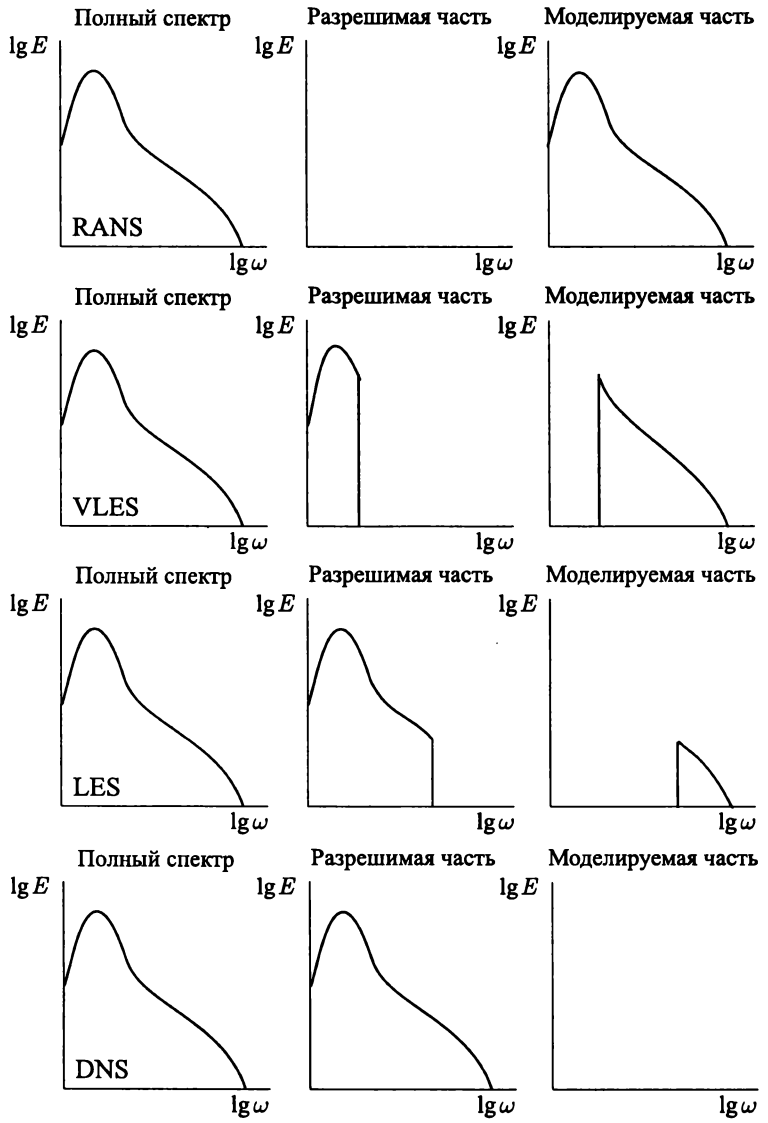


Рис. 1.6. Соотношения между разрешимой и моделируемой частями спектра турбулентности

моделирования крупных вихрей рассчитывается только его часть, соответствующая размерам вихрей, не превосходящим ширину фильтра.

Области приложения перечисленных подходов вполне определились, а полученные результаты позволяют дать оценку границ приме-

нимости, возможностей и перспективности каждого из них, а также вычислительных ресурсов, необходимых для реализации того или иного подхода.

1.3. Прямое численное моделирование

Прямое численное моделирование предполагает решение полных (нестационарных и трехмерных) уравнений Навье–Стокса, что при отсутствии численных и другого рода ошибок позволяет получить мгновенные характеристики турбулентного потока.

С практической точки зрения, статистика, полученная из результатов DNS, используется для тестирования полуэмпирических моделей турбулентности, развития методов управления турбулентными потоками, например, методов снижения сопротивления [286], исследования ламинарно-турбулентного перехода, а также понимания структуры и процессов турбулентного переноса [42, 244]. Принимая во внимание ограниченные возможности измерительной техники, DNS часто рассматривается как дополнительный источник экспериментальных данных (например, таких характеристик течения как пульсации давления, завихренность и скорость диссипации турбулентной энергии) и применяется для визуализации мгновенной картины течения.

Перспективным направлением представляется применение DNS для исследования химически реагирующих течений высокотемпературных газовых смесей [8, 324], что позволяет, в частности, рассчитать флуктуации температуры, которые оказывают существенное влияние на скорость образования оксидов азота в камерах сгорания ракетных двигателей. В химически реагирующих течениях, например, 5% флуктуации температуры могут приводить к 30% флуктуаций массовой концентрации компонентов смеси [8].

Препятствия к широкому использованию DNS на практике связаны с высокими требованиями к разностным схемам, удовлетворением начальных и граничных условий, а также ограниченными ресурсами вычислительной техники. Расчетная область должна быть достаточно протяженной, чтобы вместить наибольшие масштабы турбулентного движения, а шаг интегрирования по времени должен иметь порядок колмогоровского масштаба времени. Необходимо также использовать такую разностную сетку, которая позволит разрешить наименьшие вихри турбулентного потока, имеющие размеры порядка колмогоровского масштаба длины.

Приведем оценки для необходимого числа узлов разностной сетки и числа шагов по времени $N_{\Delta_i} = L_i/\Delta x_i$, $N_T = T/\Delta t$, где L — размер расчетной области, T — интервал интегрирования по времени. При этом пространственный шаг сетки и шаг интегрирования по времени должны удовлетворять следующим условиям: $\Delta x_i \sim l_k$, $\Delta t \sim \tau_k$. Можно считать, что $L_i \sim l$ и $T \sim \tau$, где l и τ — характерные масштабы энергосодержащих вихрей.

Учитывая соотношения между характерными масштабами энергосодержащих вихрей и характерными масштабами вихрей, рассеивающих кинетическую энергию (диссипативный участок спектра турбулентности), получим следующие оценки

$$N_{\Delta_i} \sim \frac{l}{l_k} \sim \mathrm{Re}^{3/4}, \quad N_T \sim \frac{\tau}{\tau_k} \sim\sim \mathrm{Re}^{1/2}.$$

Предполагая, что затраты процессорного времени пропорциональны числу узлов сетки, общие затраты на реализацию вычислительной процедуры оцениваются как $(N_{\Delta_i})^3 \cdot N_T \sim \mathrm{Re}^{11/4}$ (сетка содержит порядка $\mathrm{Re}^{9/4}$ узлов).

Для пристеночных течений зависимость стоимости вычислительной процедуры от турбулентного числа Рейнольдса жестче. Во внутренней (вязкой) области пограничного слоя в качестве масштабов длины и времени используются величины $\Delta x_i = \Delta x_i^+ \nu/u_\tau$, $\Delta t = \Delta x_i/u_\tau$. В пограничном слое или при течении в трубе

$$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \sim U C_f^{1/2}, \quad C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2},$$

где U — масштаб скорости (скорость на внешней границе пограничного слоя или скорость на оси симметрии трубы), C_f — коэффициент трения. Зависимость коэффициента трения от турбулентного числа Рейнольдса можно представить в виде $C_f \sim \mathrm{Re}^{-\alpha}$, причем $\alpha = 0{,}2 \div 0{,}25$. Для оценки количества узлов сетки и числа шагов по времени получим следующие оценки

$$N_{\Delta_i} \sim \frac{l}{\Delta x_i} \sim \mathrm{Re}^{1-\alpha/2}, \quad N_T \sim \frac{l}{\Delta x_i}\frac{u_\tau}{U} \sim \mathrm{Re}^{1-\alpha}.$$

Общие затраты на расчет характеристик течения в пристеночной области оцениваются как $(N_{\Delta_i})^3 \cdot N_T \sim \mathrm{Re}^{3{,}5}$.

В частности, для полностью развитого турбулентного течения в круглой трубе скорость диссипации кинетической энергии турбулентности достигает максимума на стенке и имеет порядок $\varepsilon \sim 0{,}2u_\tau^4/\nu$ [3]. Коэффициент сопротивления вычисляется по формуле [44]

$$C_f = 0{,}3164\,\mathrm{Re}^{-1/4} = 8\left(\frac{u_\tau}{u_m}\right)^2 = 8\left(\frac{\mathrm{Re}_\tau}{\mathrm{Re}}\right)^2,$$

где u_m — средняя скорость в поперечном сечении. Предположим, что шаг разностной сетки по радиальной координате равняется $\Delta r = 2\nu/u_m$. Тогда получим, что

$$\frac{R}{2\nu/u_\tau} = \frac{\mathrm{Re}_\tau}{4} = 0{,}049\,718\,\mathrm{Re}^{7/8}.$$

Оценка числа узлов разностной сетки для расчета течения в круглой трубе радиусом R и длиной $10R$ имеет вид

$$N = \frac{5\pi}{256}\mathrm{Re}_\tau^3 = 0{,}000\,482\,6\,\mathrm{Re}^{21/8}.$$

При $\mathrm{Re}_\tau = 360$ получим, что $N = 2{,}86 \cdot 10^6$.

Во внешней области пограничного слоя турбулентные вихри имеют масштаб порядка толщины пограничного слоя $\delta \sim \mathrm{Re}^{-0{,}2}$, где $\mathrm{Re} = UL/\nu$. Учитывая, что $N_{\Delta_i} \sim L_i/\delta$, получим следующие оценки: $N_{\Delta_1} \sim N_{\Delta_2} \sim \mathrm{Re}^{0{,}2}$, $N_{\Delta_3} \sim \mathrm{Re}^0$.

На практике шаг интегрирования по времени выбирается не только из физических соображений, но также и из соображений устойчивости вычислительной процедуры $\Delta t = \min\{\tau, \Delta t_v, \Delta t_c\}$, где τ — временной масштаб наименьших разрешимых вихрей турбулентного движения. Величины Δt_v и Δt_c выбираются исходя из оценки диффузионных и конвективных потоков

$$\Delta t_v = \frac{\sigma \Delta x^2}{\nu}, \quad \Delta t_c = \mathrm{CFL}\,\frac{\Delta x}{u}.$$

Значение максимально возможного числа Куранта CFL и параметра σ зависят от разностной схемы.

В качестве турбулентного числа Рейнольдса обычно выбирается величина $\mathrm{Re}_\lambda = u'\lambda/\nu$, где λ — тэйлоровский микромасштаб. Величина Re_λ определяется экспериментальным путем, в частности, для крылового профиля $\mathrm{Re}_\lambda \sim 3 \cdot 10^3$, а для атмосферного пограничного слоя $\mathrm{Re}_\lambda \sim 10^4$. Упрощенно считается, что Re_λ составляет приблизительно 1 % от макроскопического числа Рейнольдса [277].

Для продвижения решения во времени и представления пространственных производных на мельчайших масштабах на практике используются конечно-разностные схемы высокого порядка [5] (выше 2-го), а также спектральные и псевдоспектральные методы. В отличие от средней скорости, точность предсказания флуктуаций скорости в существенной степени зависит от порядка разностной схемы [84]. Ограничения, накладываемые дискретизацией по времени, обусловлены, в основном, диссипативными масштабами, а не вихрями, содержащими энергию турбулентных пульсаций.

Вычислительная область размером 0,1 × 0,1 м ^{2} содержит вихри с размерами от 10 до 100 мкм, которые отвечают частотам порядка 10 кГц. Следовательно, временно́е разрешение вихрей указанного масштаба требует шага по времени порядка 100 мкс, а их пространственное разрешение — сетки, содержащей от 10^9 до 10^{12} узлов. Для моделирования турбулентного течения при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^5$ необходимо использовать компьютер, превосходящий по производительности в 10^6 раз имеющиеся персональные компьютеры (табл. 1.1).

Общий объем памяти, необходимой для реализации DNS, в [196] оценивается как $25N^3$, где N — число узлов сетки в одном коорди-

Таблица 1.1. Требования к вычислительным ресурсам

Число Рейнольдса	$6{,}6 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	10^5	10^6
Число узлов сетки	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^3$
Время расчета (150 МФлопс)	37 ч	740 ч	6,5 лет	3000 лет
Время расчета (1 ТФлопс)	20 с	400 с	8,3 ч	4000 ч

натном направлении. Нетрудно получить, что для расчетов на сетке 512^3 требуется 25 Гб памяти, а для расчетов на сетке 2048^3 уже 1,6 Тб памяти.

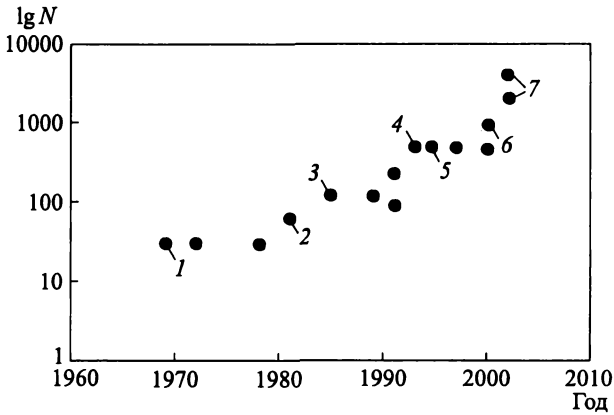
Для достижения статистически стационарной картины течения требуются десятки и сотни часов процессорного времени (результаты осредняются по времени, пространству или ансамблю реализаций). Использование неструктурированных сеток также вносит существенный вклад в затраты компьютерной памяти и процессорного времени.

Перечисленные требования делают расчеты с использованием DNS трудно реализуемыми на практике за исключением малых чисел Рейнольдса и геометрически простых течений [244] (в имеющихся реализациях число Рейнольдса составляет порядка 10^4).

Динамика развития DNS тесто связана с достигнутым уровнем производительности суперкомпьютерной техники. На рис. 1.7 приводятся ресурсы (в виде диаграммы год/число узлов), вовлекаемые в прямое численное моделирование однородной и изотропной турбулентности. Ссылки на соответствующие работы даются в виде упоминания одного из авторов работы, поскольку многие из них в настоящее время представляют лишь исторический интерес.

Расчеты на наиболее подробной сетке выполнены, по всей видимости, в работе [196] (Earth Simulator Center, Japan), в которой проведено прямое численное моделирование однородной и изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости на сетке 4096^3. Расчеты проводились на суперкомпьютере Earth Simulator, на котором достигнута производительность 16,4 ТФлопс (число узлов системы 640, пиковая производительность 40 ТФлопс, общая память 10 Тб).

Для дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству используется спектральный метод, а для дискретизации по времени — схема Рунге–Кутты 4-го порядка. Наибольшее число Рейнольдса, для которого удалось получить приемлемые результаты, составляет $\mathrm{Re}_\lambda = 1227$. Согласно довольно тривиальным оценкам, размер используемой сетки превышает объем имеющейся памяти (на сетке 4096^3 требуется 12,8 Тб памяти), в связи с чем расчет нелинейных слагаемых производится с двойной точностью, а расчет линейных — с одинарной точностью. Время расчета одного шага по времени составляет 30,2 с (на 512 узлах), а общее время счета достигает 3 дней (8400 шагов по времени).



1 — сетка 32^3, IBM 360-95 (S.A. Orszag, 1969)
2 — сетка 64^3, Cray-1 (E.D. Siggia, 1981)
3 — сетка 128^3, Cray-1S (D. Kerr, 1985)
4 — сетка 512^3, Caltech Delta (J.M. Jimenez, 1993)
5 — сетка 240^3, NWT Gordon Bell Prize (K. Yamamoto, 1994)
6 — сетка 1024^3, VPP 5000/56 (T. Ishihara, 2001)
7 — сетка 2048^3 и 4096^3, Earth Simulator (Y. Kaneda, 2003)

Рис. 1.7. Прямое численное моделирование однородной изотропной турбулентности

Решение некоторых задач, интересных с точки зрения практических приложений, приводится в работе [275] (в частности, моделирование течения в межлопаточном канале турбины низкого давления при $\mathrm{Re} = 1{,}48 \cdot 10^5$ на сетке $694 \times 224 \times 64$).

1.4. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса

В расчетной практике доминирует полуэмпирическая теория турбулентности, основанная на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Модель воспроизводит только средние значения скорости, а при необходимости — скалярных величин (например, температуры). Влияние всех флуктуаций учитывается при помощи турбулентных замыканий. В случае наличия статистически однородных направлений допускается применение усеченных расчетных моделей (одномерных или двумерных).

При использовании уравнений Рейнольдса основной интерес проявляется к динамике крупномасштабных вихрей, ответственных за переносные свойства турбулентных течений. При замыкании уравнений Рейнольдса рассматриваются масштабы длины, типичные для энергосодержащих вихрей, в которых $\mathrm{Re} \gg 1$ (за исключением пристеночной

области течения). Для учета пристеночного влияния диссипирующих вихрей и энергосодержащих вихрей при $\mathrm{Re} \sim 1$ используются демпфирующие функции (типа демпфирующего множителя Ван Дриста).

Для моделирования турбулентных течений используются стационарные или нестационарные уравнений Рейнольдса, что позволяет выделить следующие направления исследований.

1. Модели турбулентности, обеспечивающие достаточно точное предсказание измеряемых в эксперименте осредненных параметров потока в рамках стационарных уравнений Рейнольдса.

2. Нестационарные уравнения Рейнольдса в сочетании с условиями симметрии, что приводит к симметричным нестационарным решениям.

3. Нестационарные уравнения Рейнольдса в сочетании с традиционными полуэмпирическими моделями турбулентности без привлечения условия симметрии.

4. Нестационарные уравнения Рейнольдса в сочетании со специально разработанными полуэмпирическими моделями турбулентности.

Вопросы замыкания уравнений Рейнольдса решаются на различном уровне сложности [3, 38, 324]. Выбор модели турбулентности зависит от характера турбулентного потока, требуемой точности, доступных вычислительных ресурсов и временны́х затрат. Выбор подходящей модели турбулентности для решение конкретной задачи требует четких представлений свойств и ограничений каждой модели турбулентности.

Полуэмпирические модели турбулентности разработаны, в основном, для расчета стационарных и слабо нестационарных течений, а их калибровка (подбор эмпирических констант) осуществляется для достаточно тонких сдвиговых слоев в рамках уравнений пограничного слоя или уравнений Рейнольдса. Возможность применения разработанных моделей турбулентности для расчета нестационарных течений на основе URANS выглядит проблематичной.

1.5. Моделирование крупных вихрей

Отсутствие универсальной модели турбулентности, пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, привело к смещению акцентов в исследованиях, связанных с моделированием турбулентности. Возросшие возможности вычислительной техники стимулировали поиск и применение более строгих и универсальных подходов, чем RANS, и менее дорогостоящих подходов в вычислительном плане, чем DNS.

Метод моделирования крупных вихрей основан на двух предположениях. Одно из них состоит в возможности разделения поля течения на движение крупных и мелких вихрей. Крупные вихри, находящиеся под прямым воздействием граничных условий и несущие в себе максимум рейнольдсовых напряжений, рассчитываются. Мелкомасштабная турбулентность считается изотропной и имеющей универсальные характеристики, а потому менее критичной и более поддающейся мо-

делированию. Другое предположение заключается в возможности аппроксимации нелинейных взаимодействий между крупными и мелкими вихрями только по крупным вихрям с использованием подсеточных моделей. Иначе говоря, принимается гипотеза о статистической независимости крупных и мелких вихрей [4].

Спектральный интервал энергии и интервал диссипации разнесены по частотам, что подтверждает приемлемость гипотезы о статистической независимости крупно- и мелкомасштабных вихревых структур.

Мелкомасштабное движение исключается из уравнений Навье–Стокса при помощи применения операции фильтрации (рис. 1.8) и мо-

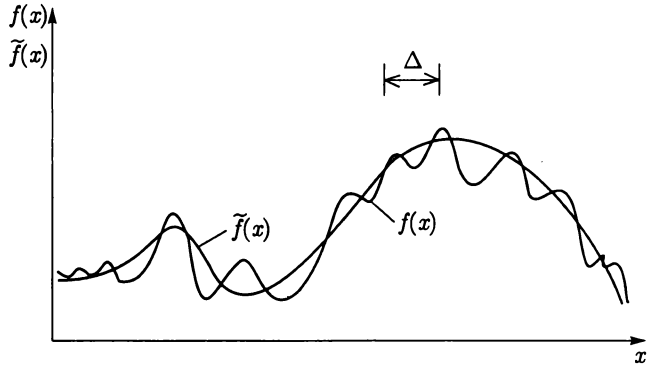


Рис. 1.8. Исключение мелкомасштабных пульсаций при помощи фильтрации

делируется с использованием подсеточных моделей. Среди наиболее популярных и часто используемых фильтрующих функций можно отметить фильтры Гаусса и Фурье, а также коробочный фильтр. При проведении расчетов на основе метода конечных объемов фильтрация осуществляется в результате интегрирования дифференциальных уравнений, представляющих законы сохранения, по контрольным объемам разностной сетки. Классификация подсеточных моделей проводится по тем же признакам, что и в RANS (по числу соотношений, вводимых в дополнение к системе фильтрованных уравнений).

В то время как DNS отображает весь диапазон размеров вихрей, в LES считаются наиболее важными крупные вихри, соответствующие малым волновым числам (рис. 1.9).

При этом подсеточные модели не оказывают критического влияния на результаты в целом [152, 268]. Статистика крупных вихрей обычно не чувствительна к подсеточному моделированию за исключением пристеночной области. Имеющиеся подсеточные модели корректно предсказывают не только средние характеристики потока (первые и вторые моменты), но также моменты более высокого порядка и флуктуации интегральных характеристик, например, коэффициентов сопротивления и подъемной силы [155]. Крупномасштабное движение рассчитывается

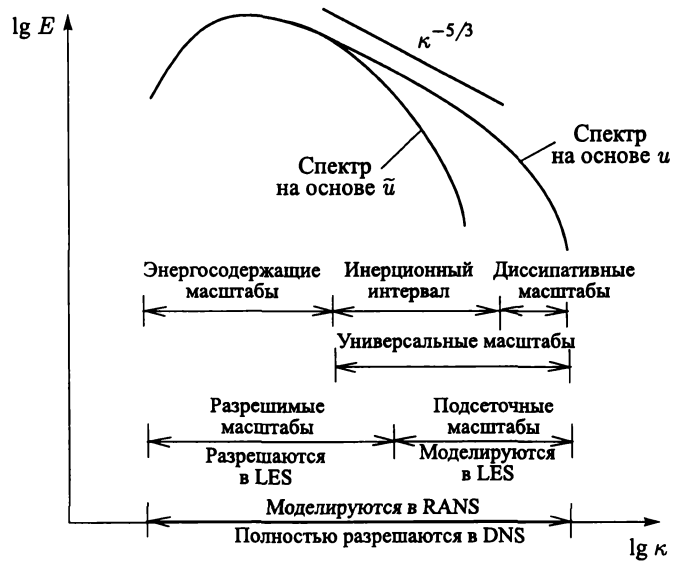


Рис. 1.9. Спектры кинетической энергии турбулентности, построенные на основе мгновенной и фильтрованной скорости

путем интегрирования фильтрованных уравнений Навье–Стокса, которые формально записываются в том же виде, что и уравнения Рейнольдса. Роль подсеточного моделирования возрастает при увеличении числа Рейнольдса [84].

По сравнению с DNS, LES требует меньших вычислительных ресурсов. Поскольку LES исключает прямой расчет мелких вихрей, то разностные сетки и временны́е шаги могут быть намного больше (примерно на порядок), чем колмогоровские масштабы длины и времени. Имеющиеся оценки показывают, что количество узлов для LES составляет около 5% количества узлов, используемого в DNS. При фиксированной расчетной памяти возможно достижение более высоких чисел Рейнольдса, чем в DNS. Тем не менее, основной проблемой в LES (как, впрочем, и в DNS), по-прежнему, остается определение производных для разрешения мельчайших масштабов.

В том случае, когда предельное волновое число (волновое число отсечки, cut-off wave number) лежит в инерционной части спектра, разрешающие требования LES не зависят от турбулентного числа Рейнольдса [267]. Однако вблизи стенки все вихри малы настолько, что размеры энергосодержащих и диссипативных вихрей перекрываются. Размеры крупных вихрей в пристеночной области зависят от числа Рейнольдса, а сеточные и временны́е шаги, требуемые для LES, вблизи стенки постепенно падают до величин, характерных для DNS. Число узлов вблизи стенки пропорционально Re_τ^2, где $\mathrm{Re}_\tau = lu_\tau/\nu$.

Общее число узлов, а также число узлов, необходимое для разрешения внутренней и внешней областей пограничного слоя, показано на рис. 1.10 в зависимости от значения числа Рейнольдса. Приведенные данные показывают, что при $\mathrm{Re} \sim 10^6$ для разрешения внутренней области пограничного слоя, толщина которой составляет около 10% от толщины пограничного слоя, используется около 99% узлов.

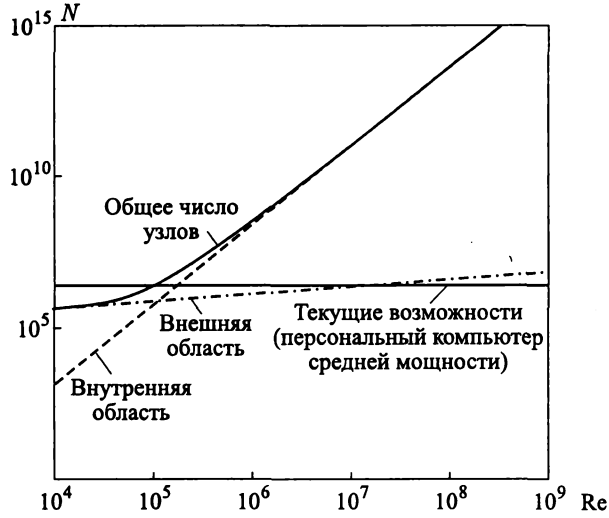


Рис. 1.10. Число узлов, необходимых для разрешения пограничного слоя

Число узлов сетки, необходимых для разрешения внешней области пограничного слоя (по нормали к стенке), пропорционально $\mathrm{Re}^{0,4}$ (в качестве характерного масштаба используется толщина пограничного слоя или полуширина канала). Для разрешения внутренней области, толщина которого составляет около 1% от толщины пограничного слоя, требуется $N \sim C_f \mathrm{Re}^2 \sim \mathrm{Re}^{1,8}$ узлов [101] (считается, что $C_f \sim \mathrm{Re}^{-0,2}$).

Следуя оценкам [101], для разрешения объема δ^3, где δ — средняя толщина пограничного слоя, требуется около 2500 узлов. В реальных расчетах пограничного слоя используется от 128 до 4096 узлов (как в [287] или 1000 узлов как в [268]).

Иногда реализации LES, позволяющие разрешить все масштабы турбулентного движения плоть до стенки и не использующие те или иные модели пограничного слоя (например, его двухслойную схему), называются Resolved LES. Такие реализации ограничиваются, в основном, расчетами сравнительно простых канонических течений [269] (течение в канале и течение в пограничном слое).

Общие затраты на реализацию LES оцениваются с учетом того, что шаг интегрирования уравнения изменения количества движения по времени не должен превышать временно́го масштаба наименьших

разрешимых масштабов турбулентного движения (временной масштаб обратно пропорционален линейному масштабу и шагу сетки), а область интегрирования по времени ограничивается интегральным масштабом [269]. Такой подход дает, что число шагов по времени составляет $N^{1/3}$, а стоимость расчета — $N^{4/3}$. Во внешней области пограничного слоя стоимость расчета оценивается как $\mathrm{Re}^{0,5}$, а во внутренней — как $\mathrm{Re}^{2,4}$. Оценка не учитывает условие устойчивости и находит подтверждение в расчетах, в которых диффузионные потоки дискретизируются при помощи неявной схемы.

Решение, полученное с помощью LES, содержит более богатую информацию по сравнению с решением на основе уравнений Рейнольдса. Так, например, получаются не только характеристики среднего течения (поля скорости, концентрации, температуры, давления) и распределения рейнольдсовых напряжений, но также и спектральные характеристики (спектры пульсаций скорости и давления), двухточечные моменты (например, пространственные и пространственно-временны́е корреляции пульсаций скорости и давления), а также временны́е и пространственные масштабы турбулентности. Многие из этих характеристик имеют важное значение для инженерных приложений (например, пульсации давления и плотности — для акустики, пульсации температуры — для расчета химически реагирующих течений). Колебания давления во многих случаях являются причиной усталостных повреждений элементов конструкции. На основе LES представляется возможным рассчитать когерентные вихревые структуры, которые контролируют дисперсию примеси [87].

Подсеточные модели, используемые в LES, обычно обладают значительной диффузией и диссипацией, что позволяет преодолеть вычислительные проблемы, связанные с представлением очень мелких вихрей на выбранной сетке, и стабилизировать численные расчеты [4, 84].

Удовлетворительная точность схем замыкания для мелкомасштабной составляющей турбулентности достигается лишь тогда, когда разделение течения на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие не оказывает заметного влияния на движение крупномасштабных структур. Перекачка энергии мелкомасштабных возмущений в более крупные масштабы может привести к схемной нелинейной неустойчивости [271]. Вопрос о том, с какой эффективностью достигается инвариантность относительного разделения масштабов, остается открытым [4]. Для предсказания процессов как прямого (forward-scatter, F-scatter), так и обратного переноса энергии (back-scatter, B-scatter) строятся специальные подсеточные модели, например, семейство динамических моделей.

Результаты расчетов, полученные при помощи LES, зависят от ширины фильтра Δ, которая входит в оператор фильтрации и обычно связывается с размером шага разностной сетки, например, для канала $\Delta \sim l/10$ [276].

Уменьшение ширины фильтра позволяет воспроизвести более широкий частотный диапазон флуктуаций (рис. 1.11). Увеличение ширины

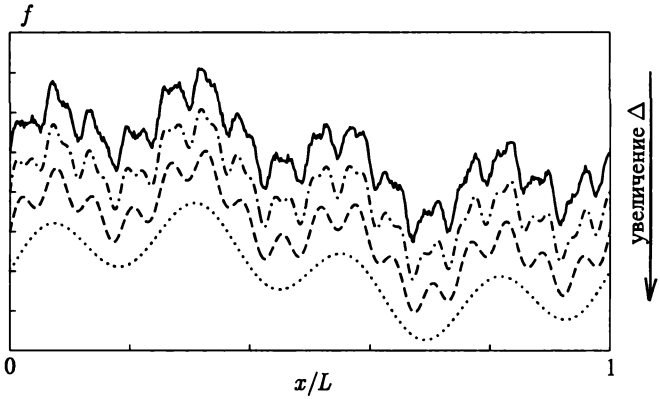


Рис. 1.11. Влияние ширины фильтра на размеры разрешимых масштабов

фильтра способствует сглаживанию численного решения, а при $\Delta \to 0$ метод LES переходит в DNS. При решении уравнений Рейнольдса используется тотальное сглаживание, а при уменьшении шага разностной сетки решение становится сеточно-независимым (всегда имеется ненулевая турбулентная вязкость).

Конечное требование сеточной сходимости состоит в том, чтобы кинетическая энергия не скапливалась в самых мелких масштабах. Путем прямого расчета макроструктур до установления результатов на разных сетках и на большом интервале времени проводится выбор интервала энергии, и удается определить эффективное значение соответствующего диссипативного механизма исходя из принципа устойчивости решения при необходимом разрешении. При таком подходе удовлетворяется требование инвариантности разделения на крупные и мелкие масштабы, и решение выходит на установившейся режим [4].

В многочисленных расчетах опробовано большое количество подсеточных моделей, фильтров, граничных условий и конечно-разностных схем [268]. Несмотря на это, не ясны ни оптимальный выбор подсеточной модели, ни обоснование выбора такого варианта [84]. Нет также универсальных пристеночных функций, обеспечивающих уменьшение количества узлов вблизи стенки, в связи с чем LES затруднительно использовать для расчета течений с малыми отрывными зонами и точками перехода, например, для обтекания профиля под углом атаки (для решения таких задач предпочтительнее использовать DES). Тем не менее, LES является перспективным направлением в развитии методов расчета турбулентных течений и представляется весомой альтернативой прямому численному моделированию и решению осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса.

Одна из проблем реализации LES состоит в том, что расчетная сетка строится заранее на основе геометрических и физических особенностей конкретной задачи. Идеальный подход к реализации LES должен включать адаптивное сгущение или разрежение сетки и изменение ширины фильтра для того, чтобы гарантировать разрешение энергосодержащих вихрей (при изменении ширины фильтра в пространстве операции дифференцирования и свертки становятся некоммутативными). Кроме того, LES извлекает наиболее крупные вихри из когерентных структур и не учитывает наиболее мелкие масштабы турбулентного движения. В результате наиболее мелкие из когерентных структур, которые не рассчитываются, а моделируются при помощи моделей подсеточного масштаба, могут инициировать обратный переход энергии от мелких вихрей к крупным и привести к вычислительной неустойчивости. Обратный переход энергии учитывается при помощи моделей подобных масштабов или смешанных моделей.

В LES требуется точное представление производных на мельчайших масштабах (в области наивысших волновых чисел).

Предположим, что в задаче требуется пространственное разрешение волн, имеющих волновые числа порядка $3l_k$, с точностью 5%. Шаг вычислительной сетки для конечно-разностных схем 2-го порядка составит $0{,}26l_k$, для схем 4-го порядка — $0{,}55l_k$, для схем 6-го порядка — $0{,}95l_k$, а для спектральных методов — $1{,}5l_k$ [244].

Исследование свойств разностных схем при помощи метода Фурье показывает, что погрешность дискретизации, вносимая центрированными разностными схемами, представляется в виде [163]

$$\delta = \kappa_m^{3/4} \begin{cases} 1{,}03 & \text{для схемы CDS-2,} \\ 0{,}82 & \text{для схемы CDS-4,} \\ 0{,}70 & \text{для схемы CDS-6,} \\ 0{,}50 & \text{для схемы CDS-8,} \end{cases}$$

где κ_m — предельное волновое число ($\kappa_m = \pi/\Delta$). Для спектральных методов $\delta = 0$.

На начальном этапе развития LES считалось, что роль фильтра выполняет пространственная дискретизация, связывающая минимальный размер вихря с размером сеточной ячейки. Численные ошибки, связанные с конечно-разностной дискретизацией нелинейных членов, могут существенно превосходить величину подсеточных напряжений. Для конечно-разностных схем низкого порядка точности эти ошибки заведомо превышают вклад подсеточных сил практически во всем спектральном диапазоне, воспроизводимом моделью независимо от пространственного разрешения.

Для точного расчета производных в области наивысших волновых чисел достаточно часто используются спектральные методы. Однако применение спектральных методов затруднительно в областях сложной геометрии и на неравномерных сетках. В связи с этим существу-

ет тенденция к применению конечно-разностных и конечно-объемных методов более высокого порядка, чем те, которые используются при решении уравнений Рейнольдса [17, 268]. В силу малости подсеточных сил по сравнению с численными ошибками, использование неконсервативных по энергии численных методов в LES нежелательно, поскольку систематическая ошибка, вносимая в энергию системы, существенно искажает коротковолновый участок спектра.

Конечно-разностные методы недооценивают производные скорости, приводя к неточностям в мельчайших диссипирующих масштабах. Диссипация устанавливается скоростью переноса энергии от крупных вихрей, так что недооцененные производные компенсируются с помощью избыточной спектральной плотности в области наибольших волновых числах, чтобы достигнуть правильной величины диссипации. Для проверки сеточной сходимости верифицируется энергетический спектр кинетической энергии турбулентности, показывая быстрый распад вихрей вблизи колмогоровского масштаба.

Нелинейные взаимодействия среди разрешимых масштабов и соответствующих им волновых чисел продуцируют волны с волновыми числами, большими волнового числа отсечки, которые интерпретируются численно (совмещенность). Такой эффект приводит к ложному переносу энергии к малым волновым числам [4].

Большинство приложений метода моделирования крупных вихрей ограничиваются средними числами Рейнольдса. В отдельных реализациях число Рейнольда принимает значения, близкие к реальным (порядка 10^6), которые представляют интерес для инженерной практики [269] (обтекание крыла самолета, течение в камере сгорания и другие).

1.6. Квазипрямое численное моделирование

Наряду с моделированием крупных вихрей, находят применение подходы, которые не используют подсеточные модели — псевдо- или квазипрямое численное моделирование (PDNS или QDNS) и монотонное моделирование крупных вихрей (MILES). Иногда вместо MILES используется другое наименование — неявный LES (Implicit LES, ILES).

Применяемые в них разностные схемы высокого порядка (традиционные схемы в PDNS и схемы, обладающие свойством монотонности, в MILES) уже имеют достаточную численную диффузию и диссипацию, которая имитирует стабилизирующее действие подсеточных моделей. Диссипативный механизм (сглаживающий фильтр) содержится в операторе, дискретизирующем конвективные слагаемые, что обеспечивает устойчивость решения («правильное» количество диссипации вводится разностной схемой). Подсеточные модели вводятся неявным образом [79, 152, 321].

Сглаживание исключает все виды мелкомасштабного движения выше выбранного волнового числа, не изменяя мод в диапазоне волновых чисел, меньших этого предельного значения. Указанным свойством (гашение мелкомасштабных пульсаций и отсутствие влияния на крупномасштабные структуры) обладают диссипативные конечно-разностные схемы, основанные на ориентированных аппроксимациях [4]. Диссипативность достигается ориентированием разностей в соответствии с направлением потока без введения явных членов с искусственной вязкостью. При использовании симметричных схем диссипация отсутствует, а вместе с ней отсутствует и механизм ослабления вредных для описания крупных вихрей коротковолновых ошибок.

Диссипативно-устойчивые разностные схемы достаточно хорошо описывают крупные вихри и ослабляют или полностью гасят ненужные мелкомасштабные возмущения (малая диссипация в области крупных масштабов и большáя в области мелких вихрей). Вместе с тем, возможна ситуация, когда для данного масштаба l диссипация так велика (отношение $\Delta x/l$ недостаточно мало), что этот вихрь сам гасится схемой. Поэтому схемы с большой диссипацией требуют аккуратного выбора сеток (отношения $\Delta x/l$).

Следует отметить, что несмотря на вычислительную эффективность и имеющиеся примеры использования, подходы такого рода не имеют должного физического обоснования, а полученные с их помощью результаты нуждаются в тщательной проверке. В существенной степени успех применения подхода определяется удачным выбором разностной схемы для дискретизации конвективных потоков.

В случае явной фильтрации уравнений Навье–Стокса возникает ряд проблем, связанных с некоммутативностью операций фильтрации и дифференцирования. Решение этих проблем зависит от удачного выбора фильтра. Использование неструктурированных сеток вносит дополнительные трудности [114].

Попытки теоретического обоснования MILES предпринимаются во многих работах. В частности, в работе [163], используя соотношение Кармана для спектра однородной и изотропной турбулентности, предложен подход к качественной оценке ошибки, вносимой подсеточной моделью. Численная диссипация и диссипация, вносимая подсеточной моделью, не являются идентичными операторами в физическом и волновом пространствах.

Численная ошибка, связанная с дискретизацией конвективных потоков, определяется порядком разностной схемы и отношением ширины фильтры к шагу сетки. Для разностных схем 2-го порядка, которые обычно используются в расчетах на неструктурированных сетках, только достаточно большúе отношения ширины фильтра и шага сетки гарантируют, что подсеточные слагаемые являются доминирующими по сравнению с диссипацией, вносимой разностной схемой. Необходимость уменьшения численной диссипации по сравнению с диссипацией,

вносимой подсеточной моделью, приводит к использованию подробных сеток.

Расширение анализа, выполненного в [163], на случай спектра, рассчитанного при помощи DNS, проводится в работе [107].

Используя ряд упрощающих предположений, в работах [153, 154, 171] получено выражение для невязки, вызванной дискретизацией конвективных потоков (residual stress tensor). В рамках используемых допущений, MILES представляет собой комбинацию подсеточной модели тензорной вязкости (в изотропной случае она сводится к модели Смагоринского) и компоненты, напоминающей тензор леонардовых напряжений. Тензор леонардовых напряжений эквивалентен тензору подсеточных напряжений в модели подобных масштабов [63].

1.7. Моделирование отсоединенных вихрей

Применение прямого численного моделирования и моделирования крупных вихрей требует достаточно мощных вычислительных ресурсов. С другой стороны, традиционный подход, основанный на использовании стационарных или нестационарных уравнений Рейнольдса, не в состоянии обеспечить приемлемую для практики точность предсказания характеристик многих течений в силу ограниченных возможностей полуэмпирических моделей турбулентности [276, 299]. Характерные для отрывных течений крупномасштабные нестационарные трехмерные вихревые структуры (следы, рециркуляционные зоны) определяются конкретными граничными условиями и геометрическими характеристиками рассматриваемых течений и не могут быть описаны в рамках таких моделей [300, 306]. Указанные обстоятельства стимулируют поиск и разработку комбинированных (гибридных) подходов, сочетающих в себе экономичность RANS и универсальность LES. К таким гибридным подходам относится моделирование отсоединенных вихрей.

В методе моделирования отсоединенных вихрей уравнения Рейнольдса используются только в тех областях потока, где размер расчетной сетки Δ недостаточно мал для разрешения турбулентных структур с линейными масштабами порядка макромасштаба турбулентности l. Метод моделирования крупных вихрей применяется в остальной области потока, где $\Delta < l$.

Конкретные реализации DES, использующиеся в вычислительной практике, основаны на использовании модели Спаларта–Аллмараса и модели Ментера [300, 306].

В модели Спаларта–Аллмараса расстояние до стенки y заменяется на величину, определяемую из соотношения

$$y_{\mathrm{DES}} = \min\{y, C_{\mathrm{DES}}\Delta\},$$

где C_{DES} — постоянная модели ($C_{\mathrm{DES}} = 0{,}65$).

Ширина фильтра определяется как максимальный из шагов сетки по разным координатным направлениям в данной точке течения

$$\Delta = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Такой подход не учитывает форму ячеек расчетной сетки и дает постоянную ширину фильтра в LES-области. В другом подходе Δ определяется следующим образом [270]

$$\Delta = \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{1/2}.$$

Применительно к пристеночным течениям такой подход в определении y_{DES} приводит к тому, что в населенной мелкими турбулентными вихрями области присоединенного пограничного слоя с характерной для нее сильно анизотропной сеткой $\Delta x \sim \Delta z = O(\delta) \gg \Delta y$ выполняется неравенство $y < C_{\mathrm{DES}}\Delta$. В качестве линейного масштаба турбулентности здесь используется истинное расстояние до стенки y. При этом реализуется стандартный подход, основанный на решении уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модели Спаларта–Аллмараса ($y_{\mathrm{DES}} = y$). В остальной области потока, в частности, в отрывных зонах, населенных сравнительно крупномасштабными вихрями, имеет место обратная ситуация, когда $y > C_{\mathrm{DES}}\Delta$. В результате, в качестве масштаба турбулентности используется зависящая от локального шага сетки величина $y_{\mathrm{DES}} = C_{\mathrm{DES}}\Delta$. Модель переходит в дифференциальную подсеточную модель турбулентности, которая в равновесных условиях (диссипация уравновешивается генерацией) переходит в классическую подсеточную модель Смагоринского [297].

В более общем подходе, допускающем применение других моделей турбулентности в RANS-области, масштаб турбулентности выбирается из условия

$$l_{\mathrm{DES}} = \min\{l_{\mathrm{RANS}}, C_{\mathrm{DES}}\Delta\}.$$

При этом $l_{\mathrm{DES}} = l_{\mathrm{RANS}}$ около стенки и $l_{\mathrm{DES}} = C_{\mathrm{DES}}\Delta$ вдали от нее.

При использовании k–ε модели (обычно используется Realizable k–ε модель) изменяется форма записи диссипативного слагаемого в уравнении для кинетической энергии турбулентности $D_k = k^{3/2}/l_{\mathrm{DES}}$, причем $l_{\mathrm{RANS}} = k^{3/2}/\varepsilon$. При $l_{\mathrm{DES}} = l_{\mathrm{RANS}}$ получается обычная форма записи диссипативного члена $D_k = \varepsilon$ в стандартной k–ε модели турбулентности.

В случае модели Ментера диссипативный член записывается в виде $D = \beta^* f_{\beta^*} k\omega$, где

$$f_{\beta^*} = \max\left\{\frac{L_t}{C_{\mathrm{DES}}\Delta}, 1\right\}, \quad L_t = \frac{k^{1/2}}{\beta^*\omega}.$$

Постоянная C_{DES} рассчитывается как взвешенное среднее значений, полученных по k–ε и k–ω моделям

$$C_{\mathrm{DES}} = (1 - f)C_{\mathrm{DES}}^{k-\varepsilon} + fC_{\mathrm{DES}}^{k-\omega},$$

где $C_{\mathrm{DES}}^{k-\varepsilon} = 0{,}78$, $C_{\mathrm{DES}}^{k-\omega} = 0{,}61$.

В области присоединенного пограничного слоя метод функционирует в режиме уравнений Рейнольдса, а в области отрыва потока переходит в метод моделирования крупных вихрей. При этом достигается сочетание лучших качеств обоих подходов — высокая точность и экономичность уравнений Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность LES в отрывной области. Хотя DES, в отличие от RANS, является принципиально нестационарным трехмерным подходом, необходимые для его реализации сетки в пристеночной области совпадают с сетками, необходимыми для решения уравнений Рейнольдса, и являются на много порядков меньшими, чем сетки, требуемые для разрешения мелких пристенных вихрей в рамках LES. По мере измельчения сетки DES асимптотически приближается к LES и далее к DNS.

Исходная версия DES некорректно работает при расчете толстых пограничных слоев и узких отрывных зон. Когда разрешение сетки в параллельном стенке направлении $\Delta_{\parallel}$ становится меньше толщины пограничного слоя Δ (из-за сгущения сетки в пристеночной области или роста толщины пограничного слоя), DES переходит в LES внутри присоединенного пограничного слоя (турбулентная вязкость меньше, чем в RANS). При низком сеточном разрешении это может приводить к преждевременному отрыву пограничного слоя от стенки (Grid Induced Separation, GIS). В связи с этим, представляется предпочтительным сохранить расчет пограничного слоя на основе уравнений Рейнольдса независимо от соотношения между $\Delta_{\parallel}$ и Δ, исключая преждевременный переход от RANS к LES.

Такая ситуация имеет, в частности, место при расчете течения в пограничном слое на стенке, на который имеет место локальное искривление поверхности (рис. 1.12). Для разрешения отрывной зоны шаги сетки как в направлении потока, так и в поперечном направлении должны быть существенно меньше толщины пограничного слоя. Это приводит к тому, что граница раздела LES и RANS-подобластей находится глубоко внутри пограничного слоя.

В ряде случаев (например, применительно к течению в плоскопараллельном канале при $180 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 8 \cdot 10^4$) применение DES приводит к формированию достаточно высоких нефизичных градиентов скорости



Рис. 1.12. Течение в пограничном слое с локальным искривлением поверхности

в LES-области [257] (DES buffer layer) и завышенному наклону профиля скорости (в расчетах это наблюдается при $\mathrm{Re}_\tau = 2 \cdot 10^4$).

В модифицированной версии DES с задержкой перехода в пограничном слое (Delayed DES, DDES), призванной устранить недостатки DES при моделировании достаточно толстых пограничных слоев и течений с малыми отрывными зонами, линейный масштаб находится из соотношения

$$l_{\mathrm{DES}} = l_{\mathrm{RANS}} - f_d \max\left\{l_{\mathrm{RANS}} - C_{\mathrm{DES}}\Delta_{\|}, 0\right\}.$$

Внутри присоединенного пограничного слоя $f_d \to 0$, приближаясь к единице на его верхней границе. Функция f_d выбирается в виде

$$f_d = 1 - \mathrm{th}\left[(8r_d)^3\right],$$

где

$$r_d = \frac{1}{(\varkappa d_w)^2} \frac{\nu + \nu_t}{\max\left\{\left(\partial v_i/\partial x_j \partial v_i/\partial x_j\right)^{1/2}, \varepsilon\right\}}.$$

Малая величина $\varepsilon = 10^{-10}$ предотвращает неопределенность. При этом $r_d = \infty$ на стенке, $r_d = 1$ в логарифмическом слое и $r_d = 0{,}4 \div 0{,}8$ во внешней области пограничного слоя.

В пограничном слое $l_{\mathrm{DES}} = l_{\mathrm{RANS}}$ независимо от разрешения сетки (переключение от RANS к LES блокируется). Вне пограничного слоя $f_d = 1$, в связи с чем

$$l_{\mathrm{DES}} = l_{\mathrm{RANS}} - \max\left\{l_{\mathrm{RANS}} - C_{\mathrm{DES}}\Delta, 0\right\},$$

что приводит к исходной формулировке

$$l_{\mathrm{DES}} = \min\left\{l_{\mathrm{RANS}}, C_{\mathrm{DES}}\Delta|\right\}.$$

Дополнительные ограничения на сетку связаны с тем, что в данном подходе сетка определяет не только минимальные разрешимые масштабы турбулентности, но и расположение границы между RANS- и LES-подобластями. Это усложняет процедуру построения сетки в трехмерной области сложной геометрии.

Использование DES накладывает специфические требования на расчетные сетки. В LES-области величина эффективной вязкости пропорциональна размерам ячеек расчетной сетки, поэтому увеличение размеров ячеек по любому из направлений может привести к увеличению схемной вязкости и искажению результатов. Вследствие этого, в LES-области лучше использовать расчетные сетки, ячейки которых имеют приблизительно одинаковые размеры по всем координатным направлениям, независимо от градиентов параметров среднего течения. В той области, где решаются уравнения Рейнольдса, допустимо использовать анизотропные сетки, адаптированные к особенностям среднего течения, или грубые сетки.

В методе DES применение низкодиссипативных центральных разностных схем затруднительно из-за их неустойчивости при решении

уравнений Рейнольдса. Вместе с тем, применительно к LES неявные противопоточные разностные схемы могут быть чрезмерно диссипативными. В имеющихся реализациях находит применение гибридная конечно-разностная схема, основанная на использовании неявной схемы 2-го порядка по времени, противопоточных схем 3-го или 5-го порядка для дискретизации невязких потоков и центральной разностной схемы 2-го порядка для дискретизации вязких потоков [306].

Метод DES требует на 20–35% меньше процессорного времени и на 30% меньше сеточных узлов, чем LES [285] (для разрешения пристеночной области течения на основе модели Спаларта–Аллмараса требуется, чтобы $y^+ < 1$). Для сравнения, стоимость RANS составляет около 6% от стоимости LES. Стоимость DES оценивается как Re_τ, что приблизительно дает зависимость числа узлов сетки от числа Рейнольдса как $\mathrm{Re}^{0,9}$ [257].

Полученные результаты свидетельствуют о широких возможностях данного подхода. Метод DES позволяет с высокой точностью рассчитывать пульсационные и спектральные характеристики турбулентных течений, что важно, например, для исследования генерации шума струями ракетных двигателей, расчета локальных и интегральных характеристик отрывных течений.

Имеется достаточно широкий положительный опыт применения DES для решения внешних задач аэродинамики. Среди решенных задач следует отметить обтекание кругового цилиндра в различных режимах, профиля NACA 0012 под углом атаки, шасси самолета и ряд других. Имеются расчеты течений за обратным уступом, обтекания призмы в канале, обтекания решетки профилей в межлопаточном канале газовой турбины и ряда других. В указанных приложениях требуется точное определение сил, действующих на тело (сила сопротивления, подъемная сила), и потерь на трение (коэффициент поверхностного трения). Полученные результаты свидетельствуют о широких возможностях этого подхода для расчета сложных турбулентных течений.

Для численного моделирования внутренних отрывных течений данный подход широко не используется.

К методу моделирования отсоединенных вихрей тесно примыкает гибридный подход (Hybrid LES/RANS), основанный на комбинации LES и RANS (несмотря на некоторую тавтологию, в литературе проводится четкое разграничение этих подходов).

1.8. Другие подходы

Наряду с моделированием отсоединенных вихрей, на практике находит применение методы, связанные с решением нестационарных уравнений Рейнольдса и уравнений Рейнольдса с частичным осреднением, а также ряд комбинированных подходов, занимающих промежу-

точное положение между RANS и LES, но не получивших широкого распространения в вычислительной практике.

1.8.1. Решение нестационарных уравнений Рейнольдса. С теоретической точки зрения правомерность использования нестационарных уравнений Рейнольдса (Unsteady RANS, URANS) далеко не очевидна, а имеющийся опыт его применения противоречив и недостаточен для формулировки общих выводов о границах его применимости.

Попытки обоснования URANS не вполне убедительны, поскольку калибровка традиционных моделей турбулентности проводится на основе сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными по характеристикам течений, осредненным по времени. По этой причине предпринимаются попытки разработки специальных полуэмпирических моделей турбулентности. Их идея состоит в том, что при описании присоединенных пограничных слоев, для которых характерно отсутствие низкочастотных (длинноволновых) вихревых структур они должны переходить в традиционные полуэмпирические модели для RANS, а в областях потока, где доминируют длинноволновые структуры, становиться LES-подобными моделями.

С функциональной точки зрения, данная идея близка к DES. В отличие от DES и других гибридных подходов, подразумевается, что модель не содержит в явной форме шаг расчетной сетки. Иными словами, сохраняя форму URANS, модель имеет, по крайней мере, некоторые свойства LES. В настоящее время предложены различные подходы, претендующие на обладание такими качествами, в частности, метод SAS (Self-Adaptive Simulation) и метод TRRANS (Turbulence Resolving RANS). Однако опыт применения таких подходов достаточно ограничен и свидетельствует о наличии ряда проблем как физического, так и вычислительного характера.

Противоречия, имеющиеся в обосновании URANS, в совокупности с традиционными моделями турбулентности, находят свое отражение в вычислительной практике. В некоторых приложениях, например, при расчете внешнего обтекания тел при наличии обширных отрывных зон, для которых характерно наличие квазипериодических нестационарных отрывных структур, в рамках URANS удается качественно верно описать эти структуры, а также количественно предсказать основные характеристики среднего течения. В то же время, существуют течения, для которых результаты решения URANS существенно отличаются от экспериментальных данных.

С точки зрения чувствительности к модели турбулентности, URANS мало чем отличается от решения стационарных уравнений Рейнольдса. Для оценки возможностей и границ применимости URANS к тому или иному типу турбулентных течений требуется сравнение результатов расчетов с данными физического эксперимента или результатами DNS/LES. Наибольшее число исследований такого рода относится к расчету двумерных течений около плохообтекаемых

тел (круглый и квадратный цилиндры, профиль под углом атаки). Двумерная геометрия течения облегчает проведение широких параметрических численных экспериментов.

Первые попытки применения URANS и оценки их возможностей были предприняты для течений с фиксированной точкой отрыва [147] (поперечное обтекание призмы с сечением в форме равностороннего треугольника, расположенной в плоском канале). В этом случае положение точки перехода ламинарного режима течения в турбулентный не сказывается на положении точки отрыва. При этом было получено периодическое решение с периодом колебаний, близким к наблюдаемому в эксперименте. Осреднение полученного решения по времени привело к достаточно хорошему согласованию по полю скорости в следе за призмой. В то же время, RANS приводит к завышенной (почти вдвое) длине рециркуляционной зоны в донной области призмы.

Успех этих исследований стимулировал попытки применения URANS к течениям с нефиксированной точкой отрыва [294] (сверхкритическое обтекание кругового цилиндра).

Результаты расчетов сверхкритического обтекания кругового цилиндра [294] показали, что стационарное решение задачи является метастабильным — устойчивость решения зависит от шага интегрирования τ исходных уравнений Рейнольдса. При сравнительно больши́х τ (порядка периода автоколебаний), получается стационарное решение, а при τ, меньших этого периода — нестационарное. Стационарное решение является строго симметричным, а нестационарное характеризуется существенной несимметрией и наличием в следе за цилиндром крупных вихревых структур (дорожка Кармана). Согласно стационарному решению, величина турбулентной вязкости в следе за цилиндром выше, чем в нестационарном. В результате, длина зоны возвратного течения в следе за цилиндром также оказывается завышенной (почти в 3 раза), а сила сопротивления, наоборот, заниженной (почти в 2 раза). Нестационарное решение лучше согласуется с экспериментальными данными по полю скорости (независимо от используемой модели турбулентности). Тем не менее, рассогласование с экспериментом остается весьма значительным по сравнению с моделирование отсоединенных вихрей [317].

Проведенные исследования отрывных турбулентных течений подтвердили преимущества URANS по сравнению с RANS. Вместе с тем, они показали, что при расчете течений с нефиксированной точкой отрыва URANS существенно уступает DES и не позволяет с достаточной точностью предсказать характеристики течения (особенно при докритических режимах течения).

В качестве одной из причин неудовлетворительной точности URANS выдвигается предположение о двумерной постановке задачи [293] (обтекание профиля, обтекание кругового цилиндра при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^4$, обтекание модели фюзеляжа самолета). В рамках трехмерной постановки задачи получаются решения, содержащие

трехмерные вихревые структуры (они имеют размер порядка характерного размера обтекаемого тела) и элементы хаоса (решение не является строго периодическим), что является типичным для DNS/LES/DES. Количественное согласование результатов расчетов в рамках трехмерного подхода с данными эксперимента оказывается также лучше (частота колебаний следа, распределение давления вдоль обтекаемой поверхности). В трехмерном случае зависимость результатов расчета от выбора модели турбулентности является менее выраженной [293].

Существенное влияние на результаты расчетов оказывает выбор размера расчетной области в поперечном к потоку направлении. При увеличении размера области не наблюдается асимптотического стремления решения к некоторому не зависящему от нее пределу [293] (в случае DES изменение размера расчетной области в поперечном направлении практически не сказывается на решении). При моделировании трехмерных тел данный недостаток URANS не проявляется [120–122] (до- и сверхкритическое обтекание сферы при $\mathrm{Re} = 10^4$ и $\mathrm{Re} = 1{,}14 \cdot 10^6$). Применение URANS в сочетании с двухслойной k–ε/k–l моделью позволило добиться удовлетворительного согласования результатов расчетов с данными эксперимента.

1.8.2. Метод ограниченных численных масштабов. К гибридным подходам моделирования турбулентных течѐний относится метод ограниченных численных масштабов (Limited Numerical Scales, LNS). В ряде англоязычных публикаций используются и другие названия, в частности, Semi-Deterministic Simulation (SDS), Coherent Structure Capturing (CSC), Coherent Eddy Simulation (CES), Very Large Eddy Simulation (VLES).

В методе LNS турбулентная вязкость находится из соотношения [67]

$$\mu_t = \alpha c_\mu \rho \frac{\widetilde{k}^2}{\widetilde{\varepsilon}},$$

в котором коэффициент α выбирается из условия

$$\alpha = \frac{1}{LV_{\mathrm{RANS}}} \min\{LV_{\mathrm{LES}}, LV_{\mathrm{RANS}}\},$$

где L и V представляют собой масштабы длины и скорости, которые используются в RANS- и LES-подобластях. В качестве масштаба длины обычно выбирается интегральный масштаб турбулентности, который выражается через кинетическую энергию турбулентности и скорость ее диссипации $l = \widetilde{k}^{3/2}/\widetilde{\varepsilon}$. Величины $\widetilde{k}$ и $\widetilde{\varepsilon}$ в подходе [67] рассчитываются на основе нелинейной k–ε модели турбулентности.

Значение $\alpha < 1$ соответствует LES-области, а при $\alpha = 1$ метод переходит в RANS. С физической точки зрения, величина αk соответствует неразрешимым подсеточным масштабам кинетической энергии, а величина $(1 - \alpha)k$ — ее разрешимым масштабам (то же самое от-

носится и к скорости диссипации). Коэффициент α рассчитывается из соотношения

$$\alpha = \frac{\min\left\{C_S\widehat{\Delta}^2|S|, c_\mu\widetilde{k}^2/\widetilde{\varepsilon}+\delta\right\}}{c_\mu\widetilde{k}^2/\widetilde{\varepsilon}+\delta},$$

где c_μ — постоянная k–ε модели ($c_\mu = 0{,}09$), C_S — постоянная Смагоринского (используется значение $C_S = 0{,}05$). Малая величина δ предотвращает неопределенность.

В соответствии с теорией Колмогорова, предполагается, что величина скорости диссипации является одной и той же для всех масштабов турбулентности $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Кинетическая энергия турбулентности фильтруется

$$\widetilde{k} = k\,[1 - g(\Delta/L)].$$

В работе [339] используется следующий фильтр

$$g = \begin{cases} 0, & \text{если } \widehat{\Delta} \geqslant L, \\ 1 - \left(\widehat{\Delta}/L\right)^{2/3}, & \text{если } \widehat{\Delta} < L. \end{cases}$$

Ширина фильтра вычисляется следующим образом

$$\widehat{\Delta} = \beta \max\{\Delta, q\Delta t\},$$

где $\beta = 2 \div 5$, а q представляет собой величину скорости в локальной системе координат. Ширина фильтра Δ связывается с объемом ячейки разностной сетки ($\Delta = V^{1/3}$).

1.8.3. Двухзонный подход. В методе DES положение границы раздела между RANS- и LES-подобластями контролируется сеточным разрешением. При использовании сложных неструктурированных сеток граница раздела имеет нерегулярное поведение [133, 322], что затрудняет практическое использование DES.

В двухзонном подходе (Zonal LES, ZLES) или комбинации LES/RANS (Hybrid LES/RANS) используется однопараметрическая k–l модель турбулентности и дифференциальная подсеточная модель (в более общем случае допускаются различные сочетания моделей в RANS- и LES-подобласти). Положение границы раздела между различными подобластями либо фиксируется на некотором расстоянии от стенки [134], либо определяется при помощи сравнения линейных масштабов в RANS- и LES-подобласти [322]. Для обеспечения гладкого перехода между подобластями находит применение динамический расчет модельного коэффициента c_μ [313] (постоянная в формуле для турбулентной вязкости).

Производится решение единого уравнения во всей расчетной области, которое имеет вид

$$\frac{\partial\rho k}{\partial t} + \frac{\partial\rho\widetilde{v}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + 2\mu\widetilde{s}_{ij}\widetilde{s}_{ij} - \rho\widetilde{\varepsilon}.$$

Скорость диссипации находится из соотношения

$$\widetilde{\varepsilon} = \max\{\varepsilon_{\text{RANS}}, \varepsilon_{\text{LES}}\}.$$

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon},$$

в которой демпфирующая функция учитывает влияние стенки

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_y}{A_\mu}\right),$$

где $A_\mu = 50 \div 70$. В качестве линейного масштаба при расчете локального числа Рейнольдса используется расстояние от центра контрольного объема до стенки $\text{Re}_y = k^{1/2} y/\nu$.

Переключение между различными подобластями зависит от значений скорости диссипации кинетической энергии неразрешаемого движения, рассчитанных двумя способами. В RANS-подобласти скорость диссипации находится из соотношения

$$\varepsilon_{\text{RANS}} = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon}.$$

В LES-подобласти соотношение для расчета скорости диссипации имеет вид

$$\varepsilon_{\text{LES}} = c_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{\Delta},$$

где c_ε — эмпирическая постоянная ($c_\varepsilon = 0{,}75$).

Линейный масштаб диссипации находится по формуле

$$l_\varepsilon = c_l y f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon = 1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_y}{A_\varepsilon}\right),$$

где $c_l = \varkappa c_\mu^{-3/4}$, $\varkappa = 0{,}41$.

Для обеспечения непрерывного изменения турбулентной вязкости в области перехода демпфирующая функция в LES-подобласти записывается в виде

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_t}{A_\mu c_l f_\varepsilon}\right).$$

Число Рейнольдса рассчитывается по формуле

$$\text{Re}_t = \frac{k^{1/2} l_t}{\nu}, \quad l_t = \min\{l f_\varepsilon, \Delta/c_\varepsilon\}.$$

Первый узел отстоит от стенки на расстоянии $y^+ < 1$, а переключение между подобластями производится в интервале $5 < y^+ < 30$.

Двухзонный подход дает хорошие результаты для различных течений. В существенной степени успех его применения определяется положением границы раздела между различными подобластями.

В некоторых случаях профиль скорости вблизи границы раздела имеет нерегулярную форму [133, 270, 321] (shift). Другой недостаток двухзонного подхода состоит в том, что он переоценивает кинетическую энергию турбулентности, которая учитывается дважды — как моделируемая и как разрешаемая турбулентность (в англоязычной литературе используется термин double counting).

В работе [313] предлагается уменьшить величину моделируемых напряжений в RANS-области, уменьшив тем самым общие сдвиговые напряжения. Другой подход состоит в использовании численного сглаживания [321] или учете обратной передачи энергии — от мелких вихрей к крупным [270] (при помощи моделей подобных масштабов или смешанных моделей).

Для устранения недостатков двухзонного подхода в [133] на границе раздела подобластей вводятся случайные флуктуации скорости. Случайные флуктуации скорости получаются либо в виде белого шума, либо в виде синтезированной турбулентности с использованием модифицированного соотношения Кармана для спектральной плотности (белый шум оказывается менее эффективным). Такой подход имеет ту же природу, что и постановка нестационарных граничных условий во входном сечении расчетной области. Тестирование подхода проводится на примере расчета полностью развитого турбулентного течения в канале при $\mathrm{Re}_\tau = 2000$. Неопределенность положения границы раздела, по-прежнему, затрудняет применение комбинированного подхода в вычислительной практике.

С идейной точки зрения, двухзонный подход близок к методу моделирования отсоединенных вихрей. Основное отличие между ними состоит в том, что в DES решение уравнений Рейнольдса используется в присоединенной части пограничного слоя, а в двухзонном подходе — во внутренней части пограничного слоя. При этом переход между различными подобластями осуществляется при помощи различных критериев.

1.8.4. Монотонное моделирование крупных вихрей. В большинстве моделей подсеточной вязкости предполагается изотропность мелких вихрей. При численной реализации LES важно гарантировать незначительность численной диффузии по сравнению с диссипацией, вводимой подсеточной моделью.

В MILES (иногда используется название неявный LES, Implicit LES, ILES) в качества механизма, стабилизирующего численные расчеты, используется численная диффузия а не диссипация [79, 321, 322]. В качестве соответствующих разностных схем находят применение противопоточные разности и схема QUICK. В некоторых реализациях удается воспроизвести обратный переход энергии [273]. Конвективные потоки дискретизируются как взвешенное среднее центрированных и противопоточных разностей. Противопоточные разности вводят численную диффузию [171].

В работе [322] предлагается комбинированный RANS/MILES подход. В пристеночной области потока используется k–l модель турбулентности ($\mu_t = \rho c_\mu l_\mu k^{1/2}$), а во внешней области пограничного слоя — метод MILES ($\mu_{\text{sgs}} = 0$). Характерные масштабы турбулентности вблизи стенки зависят от расстояния до стенки

$$l_\mu = c_l d\left[1 - \exp\left(-A_\mu y^+\right)\right], \quad l_\varepsilon = c_l d\left[1 - \exp\left(-A_\varepsilon y^+\right)\right],$$

где $c_l = \varkappa c_\mu^{-3/4}$, $A_\mu = 50 \div 70$, $A_\varepsilon = 2c_l$.

Длина d находится из уравнения Гамильтона–Якоби

$$|d| = 1 + f(d)\nabla^2 d + g(d),$$

где

$$f(d) = \varepsilon_0 d, \quad g(d) = \varepsilon_1 \left(\frac{d}{L}\right)^n.$$

Под L понимается расстояние от стенки до границы раздела (границы сопряжения RANS- и MILES-подобласти), а под n — целое число. В RANS-области d представляет собой истинное расстояние до стенки, а в MILES-области — $d = 0$. Лапласиан обеспечивает гладкость перехода меду подобластями. Функция $f(d)$ играет роль вблизи стенки, а функция $g(d)$ контролирует масштаб длины в окрестности границы раздела RANS- и MILES-подобласти.

Для дискретизации левой части уравнения используется схема Годунова, а правой части — центрированные конечные разности. При $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$ решаемое уравнение становится гиперболическим. Уравнение решается маршевым методом с условием на границе раздела $d = 0$.

Среди результатов, относящихся к практическому использованию данного подхода, следует отметить моделирование турбулентной струи, истекающей из круглого сопла в затопленной пространство или спутный поток [321, 322].

1.8.5. Моделирование когерентных структур. В методе моделирования когерентных структур (Coherent Vortex Simulation, CVS) используется нелинейный многомасштабный фильтр, основанный на вейвлет-преобразовании, и зависящий от мгновенной реализации поля течения. Он позволяет произвести разложение поля вихря скорости на когерентную негауссовскую составляющую, соответствующую крупномасштабным вихревым структурам, и некогерентную составляющую, которая близка к гауссовскому белому шуму [150, 303]. Выбор вихря скорости вместо скорости объясняется тем, что вихрь скорости является инвариантом к инерционным преобразованиям системы координат и имеет строгие топологические характеристики, удовлетворяющие, в частности, теоремам Гельмгольца и Кельвина для несжимаемой жидкости.

Когерентная часть получается при помощи операции обращения вейвлет-преобразования с коэффициентами, которые полагают-

ся бо́льшими некоторого порогового значения $\varepsilon = \varepsilon_0 |\Omega|^{1/2}$, где $\varepsilon_0 = (2 \ln N)^{1/2}$, а под N понимается число степеней свободы или число узлов сетки. Некогерентная часть реконструируется при помощи оставшихся членов ряда. После скорости получается при помощи преобразования Био–Савара.

Метод CVS гарантирует, что вихри, соответствующие отброшенной части спектра, являются неструктурированными и представляют собой случайный фон, характеризуемый гауссовской функцией плотности вероятности для поля вихря скорости в двумерном и поля скорости в трехмерном случае [150].

1.8.6. Решение уравнений Рейнольдса с частичным осреднением. Основная цель, которую преследуют комбинированные подходы, например, такие как DES, Hybrid LES/RANS, VLES, LNS, а также URANS, состоит в том, чтобы разрешить наиболее крупные вихревые структуры при минимальных затратах вычислительных ресурсов. Один из общих их недостатков состоит в том, что многие из комбинированных подходов не имеют строгого математического обоснования, заключающегося в отсутствии системы уравнений, которой они описываются (в отличие от прямого численного моделирования и моделирования крупных вихрей, в которых используются полные и фильтрованные уравнения Навье–Стокса).

Указанные недостатки стимулировали разработку подхода, основанного на решении частично осредненных уравнений Навье–Стокса (Partially Averaged Navier–Stokes, PANS), справедливых для любой ширины фильтра — от RANS до DNS. Одна из проблем в построении такого подхода заключается в выборе подходящего контрольного параметра, по которому предельный переход является корректным.

На операцию осреднения накладываются требования коммутативности с операциями дифференцирования по времени и по пространству.

В работах [167, 168] ширина фильтра контролируется отношением неразрешимой к общей кинетической энергии и скорости ее диссипации (наличие двух параметров позволяет контролировать границу между разрешимыми и диссипативными масштабами турбулентного движения). В зависимости от величины контрольного параметра основные уравнения в PANS обеспечивают плавный переход от RANS (значение контрольного параметра равняется 1) к DNS (значение контрольного параметра равняется 0). Чем меньше значения контрольных параметров, тем лучшее сеточное разрешение требуется для получения точных результатов и разрешения энергосодержащих вихревых структур. Эти параметры играют в PANS ту же роль, что и предельное волновое число в LES.

Ожидается, что, в отличие от RANS (осреднение проводится по всем масштабам), решение PANS позволит разрешить наиболее важные, с практической точки зрения, масштабы турбулентного движения. В отличие от LES, декомпозиция поля скорости основывается на разре-

шении поля кинетической энергии, а не на значении предельного волнового числа. При этом используется неявная фильтрация, а размеры масштабов, меньших ширины фильтра (Sub-Filter Scale, SFS), оказываются независимыми от сеточного разрешения (физическое разрешение становится менее зависимым от сеточного разрешения).

Тем не менее, реализация PANS не снимает проблему замыкания полученных уравнений. Конкретные реализации подхода используют уравнения для кинетической энергии и скорости ее диссипации (предполагается равенство модельных параметров в формуле для турбулентной вязкости в RANS и PANS, что вряд ли можно признать обоснованным). Основные уравнения модели переформулируются в терминах контрольных параметров, что делает их инвариантными к осреднению [160]. Для уменьшения требований к вычислительным ресурсам в пристеночной области используется решение уравнений Рейнольса.

Сравнение различных подходов (DES, Hybrid RANS/LES, PANS) применительно к течению за обратным уступом проводится в [65]. Результаты расчетов показывают, что все подходы дают приемлемые результаты.

Следует отметить, что решение PANS является наиболее поздним из всех подходов к моделированию турбулентных течений и нуждается во всесторонней проверке и тестировании.

1.9. Оценки вычислительных ресурсов

Оценки количества узлов сетки и временных шагов, необходимых для реализации DNS и LES, показывают сложность проблемы с вычислительной точки зрения.

В качестве примера рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в канале высотой h. В канале вихри удлинены в направлении, параллельном стенкам канала, а их размер составляет $l \sim 2h$. В каждом пространственном направлении требуется, по крайней мере, 4 узла для отображения вихря, поскольку необходимо адекватное разрешение производных. При использовании неравномерной сетки количество узлов составляет $N_\Delta \sim (3\mathrm{Re}_\tau)^{9/4}$, а оценка размера шага интегрирования по времени, полученная на основе экспериментальных данных, имеет вид [3]

$$\Delta t \simeq 0{,}003 \frac{h}{u_\tau \mathrm{Re}_\tau^{1/2}}.$$

Соответствующие оценки числа узлов сетки и шага интегрирования по времени приводятся в табл. 1.2. При этом предполагается, что время, необходимое для получения статистически стационарного состояния, составляет величину $T = 100h/u_m \simeq 5h/u_\tau$, где u_m — средняя скорость в поперечном сечении канала.

Для расчета статистически стационарной картины течения при $\mathrm{Re} = 6000$ ($\mathrm{Re}_\tau = 180$) на сетке с $4 \cdot 10^6$ узлов на компьютере Cray

Таблица 1.2. Оценки количества узлов сетки и размера шага интегрирования по времени для течения в канале

Re_h	Re_τ	N_Δ (DNS)	N_T(DNS)	N_Δ (LES)
12300	360	$6{,}7 \cdot 10^6$	32000	$6{,}1 \cdot 10^5$
30800	800	$4{,}0 \cdot 10^7$	47000	$3{,}0 \cdot 10^6$
61600	1450	$1{,}5 \cdot 10^8$	63000	$1{,}0 \cdot 10^7$
230000	4650	$2{,}1 \cdot 10^9$	114000	$1{,}0 \cdot 10^8$

X/MP требуется около 250 ч процессорного времени (около 40 с на один шаг по времени).

Требования, предъявляемые к различными методами моделирования турбулентных течений и перспективы их применения для решения внешних задач дозвуковой аэродинамики (обтекание самолета) с учетом прогнозов развития вычислительной техники (такие прогнозы обсуждаются, например, в работе [276]), приводятся в табл. 1.3, взятой из [299].

Таблица 1.3. Расположение методов моделирования турбулентных течений в порядке возрастания вычислительных затрат

Метод	2	3	4	5	6	7	8	9
URANS 2D	численная	+	↓	–	↑	10^5	$10^{3.5}$	1980
RANS 3D	численная	–	↓	–	↑	10^7	10^3	1985
URANS 3D	численная	+	↓	–	↑	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES	гибридная	+	↓	+	↑	10^8	10^4	2000
LES	гибридная	+	↓	+	↓	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
QDNS	физическая	+	↑	+	↓	10^{15}	$10^{7.3}$	2070
DNS	численная	+	↑	+	–	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Методы моделирования турбулентных течений располагаются в порядке возрастания вычислительных затрат, связанных с их применением. В колонке 1 приводится название численного метода. Колонка 2 показывает степень зависимости результатов численного моделирования от разрешения разностной сетки (физическая/численная/гибридная). В колонке 3 приводится зависимость характеристик течения от времени (нет/да). Колонка 4 указывает на возрастание числа узлов вычислительной сетки при увеличении числа Рейнольдса (слабая/сильная). Колонка 5 указывает на возможность использования трехмерных уравнений в случае расчетной области с осевой симметрией (нет/да). В колонке 6 показывается степень эмпиризма, количество предположений, необходимых для получения расчетных соотношений (слабая/сильная). В колонке 7 приводится количество узлов вычислительной сетки (в том

числе учитываются узлы, необходимые для разрешения турбулентного пограничного слоя). В колонке 8 приводится число шагов по времени (предполагается, что число Куранта равняется единице для расчетов нестационарных течений), а в колонке 9 — степень готовности метода и возможность его использования для решения инженерных задач (учитываются возможности и прогноз развития вычислительной техники). Считается, что для решения задачи требуется компьютер, выполняющий около 1015 операций с плавающей точкой в секунду.

Согласно прогнозу Спаларта, использование прямого численного моделирования для решения прикладных задач (например, для расчета обтекания самолета) станет возможным к 2080 г., а перспективы широкомасштабного применения моделирования крупных вихрей для решения прикладных задач реализуются к 2045 г.

Глава 2

ФИЛЬТРАЦИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПРОБЛЕМА ИХ ЗАМЫКАНИЯ

Характерной особенностью турбулентных течений является наличие беспорядочных флуктуаций характеристик потока. Зависимость мгновенных значений искомых функций от пространственных координат и времени приобретают сложный и запутанный характер, зависящий от неконтролируемых возмущений начальных и граничных условий. При многократном воспроизведении течения в одинаковых условиях точные значения полей искомых функций каждый раз оказываются иными. В силу неупорядоченности и изменчивости во времени и пространстве, при изучении турбулентности используются некоторые методы осреднения и сглаживания, позволяющие перейти от исходных случайных полей к их регулярным средним значениям.

В данной главе обсуждаются вопросы, связанные с осреднением уравнений Навье–Стокса по Рейнольдсу и Фавру, а также с явной и неявной фильтрацией уравнений Навье–Стокса. Приводятся фильтрованные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа, и формулируется проблема их замыкания.

2.1. Осреднение по Рейнольдсу

При выводе уравнений Рейнольдса используется тотальное сглаживание, одинаковое для всей области течения и всех искомых функций. При сглаживании происходит потеря информации, приводящая к отказу от получения временных флуктуирующих параметров и изучению только их средних значений. Влияние флуктуаций проявляется через напряжения Рейнольдса, которые моделируются при помощи той или иной модели турбулентности. С другой стороны, сглаживание уравнений Навье–Стокса является одним из методов регуляризации хаотических движений, приводящих к построению устойчивого вычислительного алгоритма.

Согласно подходу Рейнольдса, мгновенные параметры турбулентного потока представляются в виде суммы стационарного среднего значения и пульсационной составляющей

$$f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x}, t). \tag{2.1}$$

В обобщенном подходе любые мгновенные значения f параметров турбулентного потока, которые являются случайными функциями пространственных координат и времени, представляются в виде суммы средней во времени величины и ее пульсационной составляющей

$$f(\mathbf{x},t) = \bar{f}(\mathbf{x},t) + f'(\mathbf{x},t). \tag{2.2}$$

В подходе (2.2) средние величины трактуются как решения нестационарных уравнений Рейнольдса. Крупные вихри, ответственные за появление пиков в спектре, разрешаются, а остальная часть спектра моделируется.

Среднее по времени значение пульсационной составляющей равняется нулю $\overline{f'} = 0$. Фактически это означает, что операция осреднения функции f во времени дает ее математическое ожидание

$$\bar{f}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\mathbf{x},\tau)\,d\tau.$$

С одной стороны, период осреднения T должен быть достаточно малым по сравнению с характерным временем изменения параметров течения, а с другой — он должен превышать характерный масштаб турбулентных пульсаций.

В частности, если время осреднения велико $T \to \infty$, то среднее значение функции для всего процесса от времени не зависит

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\mathbf{x},\tau)\,d\tau.$$

Для однородной турбулентности используется осреднение по пространству

$$\bar{f}(t) = \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\int_V f(\mathbf{x},\tau)\,d\mathbf{x}.$$

При вычислении среднего значения функции f важным результатом является равенство нулю среднего по времени от ее флуктуационной части $\overline{f'} = 0$. Из определения операции осреднения также следует, что

$$\overline{f_1 f_2} = \bar{f}_1\bar{f}_2 + \overline{f_1' f_2'}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}.$$

В современной теории турбулентности вопрос о смысле операции осреднения решается иначе. Вместо осреднения по времени вводится статистическое осреднение по ансамблю реализаций [35]

$$f(\mathbf{x},t) = \langle f(\mathbf{x})\rangle + f'(\mathbf{x},t).$$

Средняя величина находится из соотношения

$$\langle f(\mathbf{x},t)\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f^n(\mathbf{x},t).$$

Индекс n относится к реализации случайного процесса.

При таком подходе к операции осреднения условия Рейнольдса описывают известные свойства теоретико-вероятностных средних значений, доказательство которых приводится в курсе теории вероятности, и не требует специального обоснования [34, 35].

Интерпретация выводов формальной теории и сопоставление результатов с данными измерений требует использования некоторых предположений об эргодичности. В теории турбулентности вводится предположение о сходимости временны́х средних значений при неограниченном увеличении интервала осреднения к соответствующим вероятностным средним значениям. Справедливость эргодической гипотезы в некоторых случаях доказывается на основе эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина, а в остальных случаях она принимается в качестве дополнительного допущения [34, 35].

2.2. Осреднение по Фавру

Наряду с временны́м осреднением, существуют и другие подходы, например, подход Фавра, который связан с введением средневзвешенных параметров. Применительно к турбулентным течениям с переменной плотностью он позволяет упростить систему уравнений, записанную относительно средних параметров потока. Использование средневзвешенных по плотности величин позволяет получить более компактные уравнения с меньшим числом неизвестных корреляций.

Согласно подходу Фавра, произвольная функция f представляется в виде суммы ее средней по времени величины и флуктуационной части

$$f(\mathbf{x},t) = \widetilde{f}(\mathbf{x}) + f''(\mathbf{x},t).$$

Средневзвешенные параметры течения определяются таким образом, чтобы уравнение неразрывности имело точно такой же вид, как и для мгновенных величин

$$\widetilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}.$$

Прямая черта сверху обозначает осреднение по времени. Для плотности и давления сохраняется обычное представление. Очевидно, что для несжимаемой жидкости $\widetilde{f} \equiv \overline{f}$.

Можно показать, что для флуктуации Фавра, обозначенной двумя штрихами, $\overline{\rho f''} = 0$, в то время как средние значения пульсационных величин, обозначенные двумя штрихами, не равняются нулю $\overline{f''} \neq 0$.

2.3. Тройное и двойное разложение

Свободные сдвиговые течения характеризуются наличием когерентных структур, представляющих собой вихревые образования (сгустки завихренности, локализованные в пространстве), развивающиеся и взаимодействующие друг с другом на фоне мелкомасштабной турбулентности [6, 150].

Когерентные структуры имеют размеры, соизмеримые с поперечным размером слоя смешения и характеризуются достаточно большим временем существования. Наличие сравнительно долгоживущих и взаимодействующих друг с другом вихревых образований вносит в хаотическую турбулентность детерминистические аспекты. Образование, взаимодействие и разрушение когерентных структур играет важную роль в процессе генерации шума на начальном участке струи. Например, в момент слияния двух крупномасштабных вихревых структур фиксируется мгновенный максимум пульсаций давления в ближнем поле струи.

Для расчета движения когерентных структур в некоторых подходах (например, в VLES) используется тройное разложение скорости [6, 323], согласно которому мгновенное значение переменной f представляется в виде суммы средней по времени величины $\overline{f}$, не зависящей от времени, случайной пульсационной (некогерентной) составляющей f', описывающей мелкомасштабное движение, и периодической (когерентной) составляющей f'', соответствующей крупным вихрям, а именно

$$f(\mathbf{x},t) = \overline{f}(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x},t) + f''(\mathbf{x},t).$$

При таком представлении предполагается, что когерентная и некогерентная составляющие некоррелированы (рис. 2.1).

Хотя когерентная и некогерентная составляющие некоррелированы между собой, они не являются независимыми. Когерентные структуры создают и пространственно упорядочивают некогерентную турбулентность. Тем не менее, масштаб времени некогерентной составляющей турбулентности обычно существенно меньше масштаба времени когерентной структуры.

Система уравнений, описывающая поведение каждой из составляющей, получается из уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности после подстановки входящих в них мгновенных величин в виде тройного разложения и применения соответствующих операторов осреднения: осреднения по времени и фазового осреднения, используемого для выделения периодической когерентной составляющей. Периодическая составляющая вычисляется следующим образом

$$f''(\mathbf{x},t) = \langle f(\mathbf{x},t)\rangle - \overline{f}(\mathbf{x}).$$

В результате получается система уравнений для осредненного, периодического и случайного движения, в которой наряду с рейнольд-

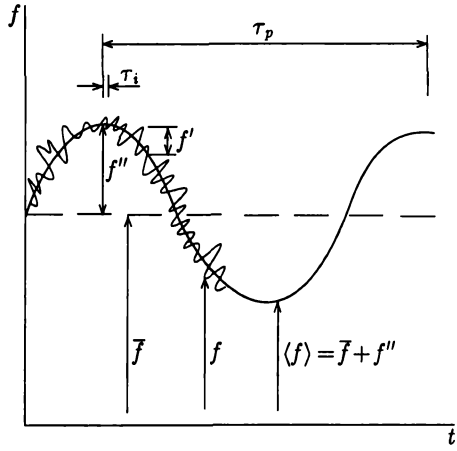


Рис. 2.1. Тройное разложение мгновенных значений параметров турбулентного потока

совыми напряжениями $\overline{v_i' v_j'}$, вызванными мелкомасштабным турбулентным движением, входят дополнительные напряжения $\overline{v_i'' v_j''}$, обусловленные периодическими когерентными структурами. Кроме того, в этих уравнениях содержатся члены, учитывающие взаимодействие периодического и случайного движения, а также каждого из последних с осредненным движением. Членами, содержащими перекрестные напряжения (вторые моменты периодической и случайной составляющих), обычно пренебрегается [6].

Рейнольдсовые напряжения находятся при помощи одной из полуэмпирических моделей турбулентности. Для нахождения периодической составляющей используется линейная теория устойчивости в невязком приближении. Наличие нелинейных процессов учитывается при помощи энергетического интегрального метода. Вместо дифференциальных уравнений переноса кинетической энергии среднего течения, периодического крупномасштабного и случайного мелкомасштабного движений, рассматривается интегральное соотношение, полученное при помощи интегрирования поперек слоя смешения исходных уравнений переноса [6].

Тройное разложение дает формализм для обсуждения физики когерентных структур по отношению к среднему течению и некогерентной турбулентности. Такой подход является интуитивно привлекательным, но страдает от ограничения, заключающегося в том, что когерентная структура трактуется как возмущение, наложенное на среднее по времени поле течения, которое является результатом действия многих когерентных структур.

В других случаях используется двойное разложение скорости на когерентную и некогерентную составляющие

$$f(\mathbf{x},t) = f'(\mathbf{x},t) + f''(\mathbf{x},t).$$

Течение описывается в подвижной системе координат, движущейся с частицами когерентной жидкости.

Двойное разложение помогает объяснить взаимодействие между когерентными и некогерентными движениями. Однако оно не распознает первичных источников кинетической энергии и не соотносится с ростом или выживанием когерентных структур.

2.4. Фильтрация

Для получения фильтрованных уравнений Навье–Стокса используются подходы с явным и неявным введением оператора фильтрации. Информация о турбулентных структурах с размерами, меньшими ширины фильтра, при фильтрации теряется, и для замыкания фильтрованной системы уравнений используются различные подсеточные модели.

2.4.1. Неявная фильтрация. Центрально-разностная дискретизация первой производной непрерывной функции $f(x)$ на равномерной сетке, имеющей шаг h, записывается в виде

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Центрально-разностная дискретизация рассматривается в качестве оператора, фильтрующего масштабы, меньшие, чем шаг сетки. Кроме того, такое представление дает значение производной средней величины.

При дискретизации уравнений Навье–Стокса на основе метода конечных объемов фильтрация осуществляется неявным образом [160]

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{V}\int\limits_{V} f(\xi)\,d\xi,$$

где V — контрольный объем. Значения параметров потока в дискретных точках представляют собой средние величины по объему ячейки разностной сетки.

Недостатки неявной фильтрации связаны с трудностями сравнения полученных результатов с результатами прямого численного моделирования и экспериментальными данными. Кроме того, неявная фильтрация не позволяет контролировать высокочастотную часть спектра, что может приводить к численным ошибкам.

2.4.2. Явная фильтрация. Введем обобщенный фильтр, дающий формальное определение операции осреднения и позволяющий исклю-

чить из рассмотрения масштабы, меньшие некоторой наперед заданной величины Δ, называемой шириной фильтра (filter width). Вихри, размер которых меньше, чем ширина фильтра, не разрешаются. Обобщенный фильтр определяется следующим образом [172]

$$\bar{f}(\mathbf{x},t)=\int\limits_D f(\boldsymbol{\xi},t)g(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\Delta)\,d\boldsymbol{\xi}.$$

В том случае, когда функция $g(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ зависит только от разности $\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}$, операции дифференцирования и фильтрации коммутируют. Тогда обобщенный фильтр вводится как интеграл свертки

$$\bar{f}(\mathbf{x},t)=\int\limits_D f(\boldsymbol{\xi},t)g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi},\Delta)\,d\boldsymbol{\xi}=f(\mathbf{x},t)*g(\mathbf{x},\Delta).$$

Предполагается, что фильтрующая функция $g(\mathbf{x})$ (filtering function), называемая также ядром фильтра (filter kernel), является четной и бесконечно дифференцируемой в ограниченной области D, имеет компактный носитель и удовлетворяет условию нормировки

$$g(\mathbf{x})=g(-\mathbf{x}),\quad \int\limits_D g(\boldsymbol{\xi},\Delta)\,d\boldsymbol{\xi}=1.$$

В предельном случае имеют место соотношения

$$\lim_{\Delta\to 0}\int\limits_D f(\boldsymbol{\xi},t)g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi},\Delta)\,d\boldsymbol{\xi}=f(\mathbf{x},t),\quad \lim_{\Delta\to 0}g(\mathbf{x},\Delta)=\delta(\mathbf{x}).$$

Интегрирование проводится по всей области течения D. Фильтрующая функция определяет структуру и размер мелкомасштабных турбулентных вихрей, разрешаемых системой осредненных уравнений. Пример фильтрующей функции приведен на рис. 2.2 (гауссовский фильтр).

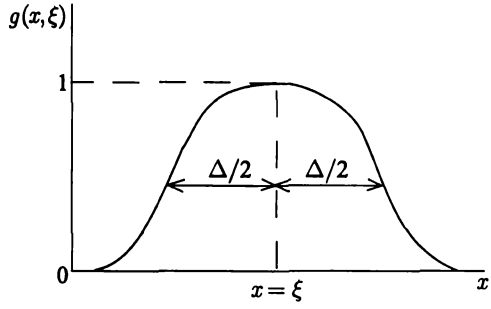


Рис. 2.2. Фильтрующая функция

Применяя оператор фильтрации к производной по времени, получим

$$\widetilde{\frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial t}}=\int g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,d\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial}{\partial t}\int g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})v_i(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\tilde{v}_i(\mathbf{x},t)}{\partial t}.$$

Для производной по пространственной координате имеем

$$\widetilde{\frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\int g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,v_i(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi} = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\,g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})v_i(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi} =$$
$$= \int g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\frac{\partial v_i(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial x_j}\,d\boldsymbol{\xi} + \int \frac{\partial g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\,v_i(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi} =$$
$$= \frac{\partial \widetilde{v}_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_j} + \int \frac{\partial g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j}\,v_i(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Согласно теореме Бореля о свертке, преобразование Фурье свертки равняется произведению преобразований Фурье

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x},t) * g(\mathbf{x})] = \mathcal{F}[f(\mathbf{x},t)]\mathcal{F}[g(\mathbf{x})].$$

Преобразованием Фурье функции $f(\mathbf{x})$, абсолютная величина $|f(\mathbf{x})|$ которой интегрируема на интервале $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$, называется функция $c(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{x})]$, где

$$c(\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})\,\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(\mathbf{k})\,\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})\,d\mathbf{k}.$$

2.4.3. Виды фильтров. Существуют различные виды фильтров, используемые в численных расчетах. Приведем примеры некоторых из них [3, 152, 268].

1. Коробочный фильтр (box filter или top-hat filter)

$$g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{при } |x_i-\xi_i| \leqslant \Delta x_i/2, \\ 0 & \text{при } |x_i-\xi_i| > \Delta x_i/2. \end{cases}$$

2. Фильтр Гаусса (Gauss filter)

$$g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{3/2} \exp\left[-6|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^2/\Delta^2\right].$$

3. Фильтр Фурье (spectral cut-off filter)

$$g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Delta^3}\prod_i \frac{\sin 2\delta_i}{\delta_i}, \quad \text{где} \quad \delta_i = \pi\,\frac{x_i-\xi_i}{\Delta}.$$

В случае коробочного фильтра, полагая $V = \Delta^3$, где V — объем ячейки расчетной сетки, получим, что

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int\limits_{V} f(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Ядро фильтра имеет вид

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1/V, & \text{если } \boldsymbol{\xi} \in V, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для одномерного случая в табл. 2.1 приведены примеры фильтрующих функций $g(r)$ и соответствующих им преобразования Фурье $c(k)$, причем $\delta_r = \pi r/\Delta$, $\delta_k = k\Delta/2$.

Таблица 2.1. Фильтрующие функции и соответствующие им преобразования Фурье

Фильтр	$g(r)$	$c(k)$
Коробочный фильтр	$1/\Delta, \quad \lvert r\rvert \leqslant \Delta/2$ $0, \quad \lvert r\rvert > \Delta/2$	$\sin\delta_k/\delta_k, \quad \lvert k\rvert \leqslant 1/\Delta$ $0, \quad \lvert k\rvert > 1/\Delta$
Фильтр Гаусса	$\left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(-6r^2/\Delta^2\right)$	$\exp\left(-k^2\Delta^2/24\right)$
Фильтр Фурье	$\frac{2}{\Delta}\frac{\sin\delta_r}{\pi r}$	$1, \quad \lvert k\rvert \leqslant \pi/\Delta$ $0, \quad \lvert k\rvert > \pi/\Delta$

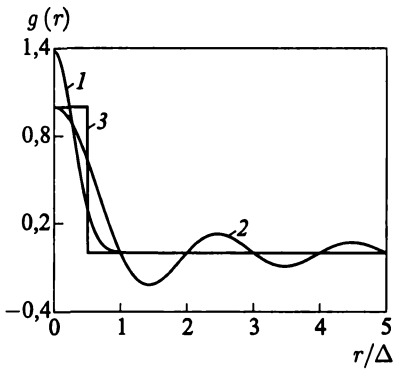


Рис. 2.3. Фильтрующие функции (*1* — коробочный фильтр, *2* — гауссовский фильтр, *3* — Фурье-фильтр)

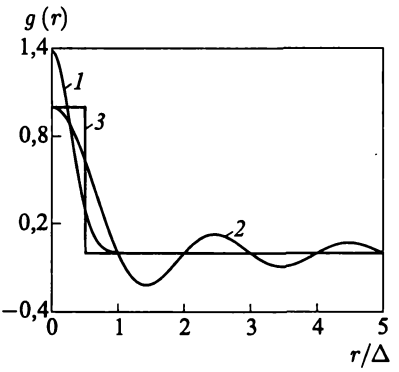


Рис. 2.4. Преобразования Фурье, соответствующие фильтрующим функциям (*1* — коробочный, *2* — гауссовский, *3* — Фурье)

В трехмерном случае неизотропный гауссовский фильтр представляется в виде

$$g(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{6}{\pi}\right)^3 \frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \times \\ \times \exp\left[-\frac{6(x_1-\xi_1)^2}{\Delta_1^2} - \frac{6(x_2-\xi_2)^2}{\Delta_2^2} - \frac{6(x_3-\xi_3)^2}{\Delta_3^2}\right].$$

За исключением Фурье-фильтра, фильтрация отличается от стандартной операции осреднения по времени тем, что

$$\overline{\overline{f}} \neq \overline{f}.$$

Гауссовский фильтр является гладким как в физическом, так и в волновом пространстве. Коробочный фильтр представляет собой ступеньку в физическом пространстве, а Фурье-фильтр — в волновом пространстве (обычно он используется при дискретизации уравнений Навье–Стокса при помощи спектрального подхода).

2.4.4. Ширина фильтра. Для представления наименьших разрешимых масштабов необходимо, чтобы ширина фильтра не превосходила шага разностной сетки. Обычно различие между этими двумя величинами игнорируется, и ширина фильтра полагается равной

$$\Delta = V^{1/3} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3},$$

где V — объем ячейки разностной сетки, Δx, Δy, Δz — шаги сетки по координатным направлениям x, y и z соответственно. Поскольку ширина фильтра зависит от разностной сетки, то фильтрующую функцию часто называют сеточным фильтром (grid filter).

Для расчетов пограничных слоев шаг сетки в нормальном к стенке направлении Δy заменяется на величину $\widehat{\Delta} y$, а ширина фильтра находится с использованием соотношения

$$\Delta = \left(\Delta x \widehat{\Delta} y \Delta z\right)^{1/3},$$

причем $\widehat{\Delta} y = \Delta y$ вблизи стенки и $\widehat{\Delta} y = \overline{\Delta} y$ вдали от стенки. Для промежуточных значений y используется плавный переход между указанными предельными значениями. Величина $\overline{\Delta} y$ представляет собой среднее значение Δy в пристеночной области, а величина $\widehat{\Delta} y$ рассчитывается по формуле

$$\widehat{\Delta} y = \left[\left(\frac{1}{\Delta y}\right)^{\omega} + \left(\frac{1}{\overline{\Delta} y}\right)^{\omega}\right]^{-1/\omega},$$

где $\omega = 3$.

Имеются также и другие определения ширины фильтра [152]. В некоторых подходах ширина фильтра связывается с минимальным или максимальным шагом расчетной сетки

$$\Delta = \beta \min_{i=1,\dots,N} \Delta x_i \quad \text{или} \quad \Delta = \beta \max_{i=1,\dots,N} \Delta x_i.$$

В других случаях в качестве ширины фильтра выбирается среднее геометрическое из шагов сетки или диагональ ячейки расчетной сетки

$$\Delta = \beta^N \left(\prod_{i=1}^{N} \Delta x_i \right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \Delta = \beta \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь β — коэффициент пропорциональности, N — размерность задачи.

При использовании неструктурированной сетки ширина фильтра находится также из соотношения [67]

$$\Delta = 4 \max \left| \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_m^k \right|,$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра ячейки, $\mathbf{r}_m^k$ — радиус-вектор серединной точки грани ячейки с номером k. Для структурированной сетки получается соотношение

$$\Delta = 2 \max \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Используется и другое определение ширины фильтра на неструктурированной сетке [92]

$$\Delta = \max \left\{ \Delta_i^k \right\},$$

где Δ_i^k — длина i-й грани k-го контрольного объема.

2.4.5. Проблемы, связанные с фильтрацией. Операции фильтрации и дифференцирования являются коммутативными только тогда, когда сетка является однородной (при $\Delta = \text{const}$).

В общем случае ширина фильтра различается по разным координатным направлениям. Ограничиваясь рассмотрением одномерного случая, применим оператор фильтрации к производной $\partial f / \partial x$. Тогда

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = \int_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} g[x - \xi, \Delta(x)] \, d\xi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = f(\xi) g[x - \xi, \Delta(x)] \Big|_D - \int_D f(\xi) \frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial \xi} \, d\xi.$$

Первое слагаемое обращается в ноль, поскольку на границах вычислительной области $f(\xi)g[x-\xi,\Delta(x)]=0$. Для производной от фильтрующей функции можно записать следующее соотношение

$$\frac{\partial g[x-\xi,\Delta(x)]}{\partial\xi}=\frac{\partial g[x-\xi,\Delta(x)]}{\partial\Delta}\frac{d\Delta(x)}{dx}-\frac{\partial g[x-\xi,\Delta(x)]}{\partial x}.$$

Выполняя необходимые преобразования, получим

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_D f(\xi)g[x-\xi,\Delta(x)]\,d\xi-\int\limits_D f(\xi)\frac{\partial g[x-\xi,\Delta(x)]}{\partial\Delta}\frac{d\Delta(x)}{dx}\,d\xi.$$

В результате, имеет место соотношение

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}=\frac{\partial\bar f(x)}{\partial x}-\frac{\partial\bar f(x)}{\partial\Delta}\frac{d\Delta(x)}{dx}.$$

Изменение ширины фильтра в пространстве приводит к появлению дополнительного слагаемого вида

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}-\frac{\partial\bar f(x)}{\partial x}=-\frac{\partial\bar f}{\partial\Delta}\frac{d\Delta}{dx},$$

которое имеет такой же порядок малости, что и производные по пространственным координатам, и дает ошибку порядка $O(\Delta^2)$, а в ряде случаев приводит к неустойчивости численной процедуры. Слагаемые, связанные с подсеточным переносом массы, импульса и энергии, имеют порядок $O(\Delta^n)$, где $4/3<n<2$ [155]. Во многих расчетах дополнительными слагаемыми, возникающими вследствие изменения ширины фильтра в пространстве, пренебрегается [268].

Такой же результат имеет место и в многомерном пространстве [234]

$$(\nabla\cdot g*)f=\nabla(f*g)-\left(\frac{\partial g}{\partial\Delta}*f\right)\operatorname{grad}\Delta,$$

где $*$ обозначает операцию свертки.

Для уменьшения ошибки при использовании схем высокого порядка точности вводятся корректирующие поправки. Иногда оператор фильтрации определяется таким образом, чтобы физическое пространство с $\Delta=\mathrm{var}$ отображалось на вычислительное пространство, где $\Delta=\mathrm{const}$. При этом в физическом пространстве $g[x-\xi,\Delta(x,\xi)]$. В некоторых случаях используются фильтры специального вида [325, 326].

Для неструктурированных сеток применяются дискретные фильтры, а операция фильтрации определяется в соответствии со следующей формулой [234, 235]

$$\bar f(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\int f(\xi)g[(x-\xi)/\Delta(x),x]\,d\xi.$$

При явной фильтрации уравнений Навье–Стокса фильтрующая функция выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$(g*, \nabla)\,\mathbf{v} = 0.$$

Вопросы, связанные с некоммутативностью операций фильтрации и дифференцирования по времени (это имеет место при использовании динамических сеток, меняющихся с течением времени) рассматриваются в работе [217].

Форма записи уравнений, используемых в LES, не зависит от выбора фильтрующей функции. Приемлемая ширина фильтра (шаг расчетной сетки в случае неявной фильтрации) выбирается, как правило, методом проб и ошибок. При $\Delta \to 0$ метод LES переходит в DNS.

2.5. Фильтрованные уравнения переноса

Приведем фильтрованные по пространству уравнения, описывающие пространственное течение многокомпонентной смеси газов, и сформулируем проблему их замыкания.

2.5.1. Уравнения для мгновенных параметров. Система уравнений, описывающая течение многокомпонентной реагирующей смеси газов, включает в себя уравнение неразрывности, уравнение изменения количества движения и уравнение энергии для смеси, а также уравнения неразрывности для каждого из компонент $\alpha = 1, \ldots, M$ и уравнение состояния. В дифференциальной форме уравнения сохранения имеют следующий вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho Y_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_\alpha \mathbf{v} + \mathbf{J}_\alpha) = S_\alpha; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}) = \rho \sum_\alpha Y_\alpha \mathbf{F}_\alpha; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathbf{q}^r) = \rho \sum_\alpha Y_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}_\alpha). \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — среднемассовая скорость смеси, $\mathbf{w}_\alpha$ — скорость диффузии компонента α, $\mathbf{q}$ — тепловой поток за счет теплопроводности, $\mathbf{q}^r$ — радиационный тепловой поток, S_α — массовая скорость образования компонента α в химических реакциях.

Уравнение состояния смеси записывается в виде

$$p = \rho \frac{R}{M} T,$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Молярная масса смеси M рассчитывается через молярные массы своих компонент M_α по формуле

$$\frac{1}{M} = \sum_\alpha \frac{Y_\alpha}{M_\alpha}.$$

Массовая концентрация компонента α равняется $Y_\alpha = \rho_\alpha/\rho$, причем для смеси газов выполняется условие

$$\sum_\alpha Y_\alpha = 1.$$

Тензор напряжений $\mathbf{\Pi}$ связан с давлением p и тензором вязких напряжений $\mathbf{T}$ при помощи соотношения

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}.$$

Тензор вязких напряжений связан с тензором скоростей деформаций $\mathbf{E}$ при помощи соотношения, выражающего обобщенный закон Ньютона

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{S} - \frac{2}{3}\mu\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{I}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^*].$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Звездочка обозначает сопряженный тензор.

Вектор плотности теплового потока в многокомпонентной смеси реагирующих газов записывается в виде обобщенного закона Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T + \sum_\alpha h_\alpha \mathbf{J}_\alpha.$$

Вкладом термодиффузии в перенос энергии пренебрегается. Вычисление плотности теплового потока за счет излучения требует построения специальной математической модели.

Удельная энтальпия (компонента α) вычисляется по формуле

$$h_\alpha = h_\alpha^\circ(T_0) + \int_{T_0}^{T} c_{p\alpha}(T)\,dT.$$

Приведенное соотношение учитывает энергию образования компонента α, обозначенную через h_α°, при температуре T_0. Зависимость удельной теплоемкости компоненты $c_{p\alpha}$ от температуры (до $T \sim 2500$ K) аппроксимируется полиномиальной зависимостью

$$c_{p\alpha} = \sum_i c_{\alpha i}(T - T_0)^i,$$

где $T_0 = 298{,}15$ K.

Удельная энтальпия h и удельная теплоемкость смеси c_p вычисляются путем суммирования по всем компонентам смеси

$$h = \sum_\alpha h_\alpha Y_\alpha, \quad c_p = \sum_\alpha c_{p\alpha} Y_\alpha.$$

Полная удельная энергия смеси e связана с удельной внутренней энергией u посредством соотношения

$$e = u + \frac{v_k v_k}{2}, \quad u = h - \frac{p}{\rho}.$$

Для вычисления вектора плотности диффузионного потока компоненты α смеси $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha$ и коэффициентов переноса многокомпонентной смеси (коэффициентов вязкости μ, теплопроводности λ и диффузии D_α) используются результаты кинетической теории газов. Однако получение явных выражений для диффузионных потоков требует обращения матрицы размерности $(M-1)\times(M-1)$. При большом числе компонент такой подход приводит к существенным вычислительным затратам. Поэтому на практике обычно применяют приближенные способы описания многокомпонентной диффузии.

При малом различии молярных масс и коэффициентов диффузии компонент диффузионный поток для компонента α записывается в виде закона Фика

$$\mathbf{J}_\alpha = -\rho D_\alpha \nabla Y_\alpha.$$

Поскольку суммарный поток массы, возникающий из-за взаимной диффузии компонентов не известен, то диффузионные скорости принимаются удовлетворяющими условию

$$\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0.$$

Коэффициент диффузии D_α, как правило, считается одинаковым для всех компонент.

Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности многокомпонентной газовой смеси используются приближенные формулы. Поскольку характерное время реакций обычно много больше среднего времени свободного пробега молекул, то влиянием химических реакций на коэффициенты переноса пренебрегается.

Вектор $\mathbf{F}_\alpha$ представляет собой вектор плотности внешних массовых сил, приходящихся на компонент α (в общем случае они могут быть различными для разных компонент). При учете действия только силы тяжести полагается $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{g}$ для $\forall \alpha = 1, \ldots, M$, где $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести. Во многих случаях слагаемыми, связанными с внешними массовыми силами, в уравнении энергии пренебрегается.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат уравнения (2.3)–(2.6) записываются в следующем виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \rho Y_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_\alpha v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial J_{\alpha j}}{\partial x_j} + m_\alpha; \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i; \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j^r}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} v_j}{\partial x_j}. \tag{2.10}$$

Компоненты тензора вязких напряжений, компоненты тензора скоростей деформаций и составляющие вектора теплового потока вычисляются по формулам

$$\tau_{ij} = \mu\left(2s_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}s_{kk}\right);$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right);$$

$$q_i = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Зависимость коэффициентов переноса от температуры учитывается на основе кинетической теории газов и экспериментальных данных.

2.5.2. Уравнения для фильтрованных параметров. В соответствии с определением операции фильтрации, имеет место следующее соотношение

$$\overline{\rho}\widetilde{f} = \overline{\rho f} = \int\limits_D \rho f(\boldsymbol{\xi}, t) g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Применяя к приведенным уравнениям оператор фильтрации, получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_j}{\partial x_j} = 0; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{Y}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{Y}_\alpha\widetilde{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{J}_{\alpha j}}{\partial x_j} + \overline{m}_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\overline{\rho}(\widetilde{Y_\alpha v_j} - \widetilde{Y}_\alpha\widetilde{v}_j)\right]}_{\text{I}}; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \overline{\rho}g_i - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\overline{\rho}(\widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j)\right]}_{\text{II}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\overline{\tau}_{ij} - \widetilde{\tau}_{ij}\right)}_{\text{III}}; \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{e}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{e}\widetilde{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}\widetilde{v}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{q}_j^r}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{\tau}_{ij}\widetilde{v}_j}{\partial x_j} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\overline{\rho}(\widetilde{ev_j} - \widetilde{e}\widetilde{v}_j)\right]}_{\text{IV}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\overline{q}_j - \widetilde{q}_j\right)}_{\text{V}} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\overline{pv_j} - \overline{p}\,\widetilde{v}_j\right)}_{\text{VI}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\overline{\tau_{ij}v_j} - \widetilde{\tau}_{ij}\widetilde{v}_j\right)}_{\text{VII}}. \tag{2.14}$$

Уравнение состояния имеет вид

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \widetilde{T} \sum_{\alpha} \frac{\widetilde{Y}_\alpha}{M_\alpha}. \tag{2.15}$$

Компоненты тензора вязких напряжений, составляющие вектора теплового потока и диффузионного потока массы записываются в виде

$$\widetilde{\tau}_{ij} = \widetilde{\mu}\left(2\widetilde{s}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\widetilde{s}_{kk}\right);$$

$$\widetilde{s}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i}\right);$$

$$\widetilde{q}_i = -\widetilde{\lambda}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i};$$

$$\widetilde{J}_{\alpha j} = -\bar{\rho}\widetilde{D}_\alpha \frac{\partial \widetilde{Y}_\alpha}{\partial x_j}.$$

Коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии вычисляются по средней температуре потока

$$\widetilde{\mu} = \mu(\widetilde{T}), \quad \widetilde{\lambda} = \lambda(\widetilde{T}), \quad \widetilde{D}_\alpha = D_\alpha(\widetilde{T}).$$

Как правило, влиянием флуктуаций параметров потока на коэффициенты переноса пренебрегается.

2.6. Проблема замыкания

Система уравнений (2.11)–(2.15) не является замкнутой. Наряду с фильтрованными переменными, она содержит следующие неизвестные величины, зависящие от мелкомасштабных (подсеточных) составляющих и требующие моделирования.

1. Подсеточный диффузионный поток массы

$$J_{\alpha j} = \bar{\rho}(\widetilde{Y_\alpha v_j} - \widetilde{Y}_\alpha \widetilde{v}_j).$$

2. Тензор подсеточных напряжений

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}\,(\widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j).$$

Используя представление скорости в виде суммы осредненной и пульсационной составляющей, можно записать [159]

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}\Big(\underbrace{\widetilde{v_i' v_j'}}_{R_{ij}} + \underbrace{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\widetilde{v}_i \widetilde{v_j'} + \widetilde{v_i' \widetilde{v}_j}}_{C_{ij}}\Big),$$

где R_{ij} — компоненты тензора рейнольдсовых напряжений, L_{ij} — компоненты тензора леонардовых напряжения, C_{ij} — компоненты тензора перекрестных напряжений.

Тензор подсеточных напряжений является симметричным, положительно определенным тензором, инвариантным относительно изменения системы координат (изотропная функция своих аргументов).

Для вычисления компонент тензора подсеточных напряжений имеется набор математических моделей различной степени сложности [3, 268]. Во многих подсеточных моделях (например, в моделях вихревой вязкости) перекрестными и леонардовыми напряжениями пренебрегается, а сами подсеточные модели не удовлетворяют условию инвариантности [155]. Тем не менее, такие модели успешно применяются для расчетов различных турбулентных потоков.

Учет сжимаемости достаточно сложен, в частности, в связи с отсутствием соответствующей информационной базы, и требует введения дополнительных эмпирических коэффициентов [267].

3. Слагаемым III в уравнении изменения количества движения, которое появляется из-за нелинейности конвективных членов, пренебрегается

$$\overline{\tau}_{ij} - \widetilde{\tau}_{ij} \simeq 0.$$

4. Подсеточный поток энергии

$$e_j = \overline{\rho}\,(\widetilde{ev_j} - \widetilde{e}\,\widetilde{v}_j).$$

Учитывая представление полной энергии через внутреннюю и кинетическую энергию

$$\widetilde{e} = \widetilde{u} + \frac{\widetilde{v_k v_k}}{2},$$

слагаемое IV в уравнении изменения энергии записывается в следующем виде

$$e_j = \overline{\rho}\,(\widetilde{uv_j} - \widetilde{u}\,\widetilde{v}_j) + \frac{\overline{\rho}}{2}\left(\widetilde{v_j v_k v_k} - \widetilde{v}_j \widetilde{v_k v_k}\right) = \frac{Q_j}{\gamma} + \overline{\rho} D_j.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой подсеточный тепловой поток

$$\frac{Q_j}{\gamma} = \overline{\rho}\,(\widetilde{uv_j} - \widetilde{u}\,\widetilde{v}_j).$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой подсеточную турбулентную диффузию, которая моделируется при помощи следующего соотношения

$$D_j = \frac{1}{2}\left(\widetilde{v_j v_k v_k} - \widetilde{v}_j \widetilde{v_k v_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{v_j v_k v_k} - \widetilde{v}_j \widetilde{v}_k \widetilde{v}_k - \widetilde{v}_j \tau_{kk}\right) \simeq \tau_{jk} \widetilde{v}_k.$$

Подсеточный тепловой поток рассчитывается либо на основе специальных моделей, либо связывается с подсеточной турбулентной вязкостью при помощи подсеточного числа Прандтля.

5. Слагаемое V в уравнении изменения полной энергии обычно считается пренебрежимо малым

$$\overline{q}_i - \widetilde{q}_i \simeq 0.$$

Такое же предположение делается и относительного плотности теплового потока за счет излучения ($\overline{q}^r \simeq \widetilde{q}^r$), а также скорости химической реакции ($\overline{m}_\alpha \simeq \widetilde{m}_\alpha$).

6. Слагаемое, связанное с подсеточной работой сил давления. С учетом уравнения состояния слагаемое VI записывается в следующем виде

$$\overline{pv_j} - \overline{p}\widetilde{v}_j = \overline{\rho}\frac{R}{M}\left(\widetilde{Tv_j} - \widetilde{T}\widetilde{v}_j\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Q_j.$$

В некоторых расчетах данным слагаемым пренебрегается.

7. Слагаемым VII, представляющим собой подсеточную вязкую диссипацию, обычно пренебрегается

$$\overline{\tau_{ij}v_j} - \widetilde{\tau_{ij}v_j} \simeq 0.$$

На основе сопоставления результатов расчетов течений в слоях смешения с данными прямого численного моделирования при $M = 0{,}2 \div 0{,}6$ показано, что пренебрежение слагаемыми III и V вполне допустимо. В то же время, слагаемые VI и VII, связанные с подсеточной работой сил давления и подсеточной вязкой диссипацией, имеют тот же порядок, что и подсеточный тепловой поток [268]. Учет подсеточной вязкой диссипации, описываемой слагаемым VII, приводит к результатам, лучше согласующимся с данными прямого численного моделирования (особенно при средних и высоких числах Маха, а также высоких температурах).

Вместо уравнения для полной энергии (2.14) используется уравнение для внутренней энергии или уравнение для энтальпии. Отличие заключается лишь в записи слагаемых, требующих моделирования [267, 268]. Например, при записи уравнения для внутренней энергии вместо D_j требуется моделирование слагаемого, связанного с расширением трубки тока $\widetilde{p\varepsilon_{kk}} - \overline{p}\widetilde{\varepsilon}_{kk}$, которым во многих случаях пренебрегается.

2.7. Учет сжимаемости

Для моделирования сжимаемых течений используется либо осреднение Рейнольдса, либо осреднение Фавра $\widetilde{f} = \overline{\rho f}/\overline{\rho}$ (черта обозначает фильтрацию). Рассмотрим различие между двумя подходами (подходами Рейнольдса и Фавра) к формулировке уравнений, описывающих течение вязкого сжимаемого газа.

2.7.1. Осреднение по Фавру. При использовании осреднения Фавра уравнения неразрывности, изменения количества движения и полной энергии единицы объема имеют вид

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_j\right) = 0;$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_j\widetilde{v}_i\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho}\left(\widetilde{v_iv_j} - \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j\right)\right];$$

$$\frac{\partial \widetilde{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\widetilde{e}+\overline{p})\,\widetilde{v}_j\right]=-\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial \widetilde{\tau}_{ij}\widetilde{v}_j}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\widetilde{ev_j}-\widetilde{e}\,\widetilde{v}_j+\overline{pv_j}-\overline{p}\,\widetilde{v}_j\right).$$

Дополнительными членами в уравнении энергии пренебрегается. Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока имеют вид

$$\widetilde{\tau}_{ij}=\overline{\mu}\left(\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right);$$

$$\widetilde{q}_j=-\overline{\lambda}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}.$$

Полный тензор напряжений в уравнении изменения количества движения представляется в виде суммы двух составляющих

$$T_{ij}=\tau_{ij}+\tau^*_{ij}.$$

В уравнении изменения полной энергии член $\partial H_j/\partial x_j$ и составляющие вектора теплового потока имеют вид

$$H_j=q_j+Q_j+T_{ij}\widetilde{v}_j;$$

$$Q_j=-c_p\overline{\rho}\left(\widetilde{v_jT}+\widetilde{v}_j\widetilde{T}\right).$$

При этом требуют моделирования подсеточные напряжения, подсеточный тепловой поток и подсеточная работа вязких сил

$$\tau^*_{ij}=\overline{\rho}\left(\widetilde{v_iv_j}-\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j\right);$$

$$H^*_i=\overline{\rho}\left(\widetilde{ev_i}-\widetilde{e}\widetilde{v}_i\right)+\left(\overline{pv_i}-\overline{p}\widetilde{v}_i\right);$$

$$\sigma^*_i=\widetilde{v_j\tau_{ij}}-\widetilde{v}_j\widetilde{\tau}_{ij}.$$

В работе [333] проводится тестирование различных подсеточных моделей для сжимаемого слоя смешения. На основе численных расчетов показывается, что для подсеточных напряжений смешанная модель с динамической оценкой модельных коэффициентов дает приемлемые результаты. Пренебрежение членом с давлением в уравнении энергии и диссипацией приводит к существенным погрешностям. Все эти слагаемые являются пренебрежимо малыми при низких числах Маха.

2.7.2. Осреднение по Рейнольдсу. При использовании осреднения Рейнольдса уравнения неразрывности, изменения количества движения и полной энергии единицы объема имеют вид

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\overline{v}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho v_j}-\overline{\rho}\,\overline{v}_j\right);$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}_i}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}_j\,\overline{v}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho v_iv_j}-\overline{\rho}\,\overline{v}_i\,\overline{v}_j\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho v_i}-\overline{\rho}\,\overline{v}_i\right);$$

$$\frac{\partial \overline{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\overline{e}+\overline{p})\,\overline{v}_j\right]=-\frac{\partial \overline{q}_j}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{\tau}_{ij}\overline{v}_j}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{ev_j}-\overline{e}\,\overline{v}_j+\overline{pv_j}-\overline{p}\,\overline{v}_j\right).$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока имеют вид

$$\overline{\tau}_{ij} = \overline{\mu}\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right);$$

$$\overline{q}_j = -\overline{\lambda}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}.$$

Дополнительные слагаемые моделируются при помощи следующих соотношений (модель Смагоринского):

— подсеточный поток массы

$$m_j = \overline{\rho v_i} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i = -C_\rho \Delta^2 |\overline{s}| \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i};$$

— подсеточные напряжения

$$\overline{\rho v_i v_j} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{v}_j = \overline{\rho} C_S \Delta^2 |\overline{s}|\,\overline{s}_{ij} = \overline{\rho}\nu_{\text{sgs}}\overline{s}_{ij};$$

— подсеточный тепловой поток

$$\overline{\rho v_i T} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{T} = -\overline{\rho}\frac{\nu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}.$$

Соотношение для теплового потока получается с использованием уравнения состояния $p = (\gamma - 1)\rho T/\gamma$ и имеет вид

$$\overline{v_i e} + \overline{v_i p} - \overline{v}_i\overline{e} - \overline{v}_i\overline{p} = \left(\overline{\rho v_i T} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{T} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i v_k v_k} - \frac{1}{2}\overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{v}_k\overline{v}_k\right).$$

Правая часть переписывается в виде

$$\left(\overline{\rho v_i T} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{T} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i v_k v_k} - \frac{1}{2}\overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{v}_k\overline{v}_k\right) \approx \overline{\rho v_i T} - \overline{\rho}\,\overline{v}_i\overline{T}.$$

Коэффициенты C_ρ и C_S обычно находятся при помощи динамической модели [75].

В сжимаемом газе формулировка подсеточных моделей усложняется. Для удобства вводится макротемпература

$$\vartheta = \overline{T} - \frac{\overline{\tau}_{kk}}{2c_v\overline{\rho}},$$

где $\overline{\tau}_{kk}$ представляет собой след тензора подсеточных напряжений.

Макротемпература связывается с макродавлением при помощи соотношения

$$\omega = \overline{\rho}R\vartheta + \frac{1}{6}(3\gamma - 5)\,\overline{\tau}_{kk},$$

заменяющим уравнение состояния. Последнее слагаемое в приведенном соотношении является малым даже при больших числах Маха, поэтому им пренебрегается, а для установления связи между $\overline{\rho}$, ϑ и ω используются законы идеального газа. В этом случае для расчета параметров

потока $\overline{\rho}$, $\overline{v}_i$, ω, ϑ или $\bar{e}$ получается система уравнений, эквивалентная уравнениям Навье–Стокса для сжимаемого газа. Коэффициенты переноса вычисляются по тем же самым соотношениям, что и в случае несжимаемой жидкости.

2.7.3. Сравнение различных подходов. При использовании осреднения Фавра система уравнения получается несколько проще, поскольку не появляются дополнительные слагаемые в уравнении неразрывности. При этом нестационарный член в уравнении изменения количества движения не требует дополнительной модели (он появляется раньше).

В работе [151] на основе численных расчетов слоя смешения показывается, что при малых числах Маха оба вида осреднения приводят к одинаковым результатам. В тоже время, использование осреднения Фавра в ряде случаев приводит к численной неустойчивости из-за формы уравнения неразрывности [75]. Для преодоление неустойчивости в правую часть уравнения неразрывности добавляется диффузионное слагаемое.

2.8. Уравнения в консервативных переменных

В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается следующим уравнением, записанным относительно фильтрованных по пространству величин

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{H}. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \omega^2 r^2 \right) \right].$$

Вектор консервативных переменных $\mathbf{Q}$ и вектора потоков $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ имеют следующий вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p) v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p) v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p) v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Неинерциальность системы отсчета (система координат вращается с угловой скоростью ω) учитывается при помощи введения в источниковый член $\mathbf{H}$ кориолисовой и центробежной силы

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\omega(y\omega + 2v_z) \\ \rho\omega(z\omega - 2v_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\tau_{ij} = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right);$$

$$q_i = -\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь t — время, r — радиус вращения, ρ — плотность, ω — угловая скорость, v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z, p — давление, e — полная энергия единицы массы, T — температура, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнение (2.16) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. Несмотря на то, что уравнение (2.16) формально совпадает с нестационарными уравнениями Рейнольдса, оно записывается относительно фильтрованных величин, а не относительно средних значений искомых функций как в RANS.

При моделировании ламинарных течений эффективная вязкость полагается равной молекулярной вязкости $\mu_{\text{eff}} = \mu$. При моделировании турбулентных течений эффективная вязкость μ_{eff} вычисляется как сумма молекулярной μ и подсеточной μ_{sgs} вязкости, а эффективная

теплопроводность λ_{eff} выражается через вязкость и число Прандтля

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_{\text{sgs}}, \quad \lambda_{\text{eff}} = c_p \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \right),$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Подсеточному числу Прандтля обычно присваивается постоянное значение.

Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0},$$

где $\mu_* = 1{,}68 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $T_* = 273$ K и $S_0 = 110{,}5$ K для воздуха. Молекулярная теплопроводность связывается с числом Прандтля (для воздуха $\text{Pr} = 0{,}72$).

Крупномасштабные вихревые структуры рассчитываются при помощи интегрирования фильтрованных уравнений Навье–Стокса. При этом решается система уравнений, вид которой формально совпадает с нестационарными уравнениями Рейнольдса. Отличие заключается в том, что уравнения записываются относительно фильтрованных параметров течения, а вместо обычной вихревой вязкости в уравнения входит подсеточная вязкость.

Мелкие вихри, размер которых не превышает шага разностной сетки, имеют универсальную природу, и моделируются на основе некоторых рациональных приближений. Шаг сетки может быть больше, чем в прямом численном моделировании, поскольку нет необходимости, чтобы размер ячейки был меньше самых мелких вихрей. Требование сеточного разрешения состоит в том, чтобы турбулентные вихри, меньшие размера ячейки, попадали в инерционный интервал спектра.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛАГАЕМЫХ, СВЯЗАННЫХ С ПОДСЕТОЧНЫМ ПЕРЕНОСОМ

Неустранимый недостаток подхода, основанного на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, заключается в том, что в нем используется осреднение по всему диапазону турбулентных масштабов. В развитой турбулентности выделяют два принципиально различных масштаба движений — крупномасштабную турбулентность, которая определяется геометрией и структурой среднего течения и не описывается универсальным образом, и мелкомасштабную турбулентность, которая является равновесной и имеет универсальную структуру. В методе моделирования крупных вихрей крупномасштабные вихревые структуры рассчитываются при помощи интегрирования фильтрованных уравнений Навье–Стокса. Мелкие вихри, размер которых не превышает шага разностной сетки, имеют универсальную природу, и моделируются на основе некоторых рациональных приближений.

В данной главе рассматриваются вопросы моделирования слагаемых, связанных с подсеточным переносом импульса, тепла и массы. Приводится классификация подсеточных моделей и выделяются их основные группы (модели вихревой вязкости, модели подобных масштабов, смешанные модели, спектральные модели, модели с обращением свертки и ряд других). Обсуждаются достоинства и недостатки различных моделей.

3.1. Модели подсеточной вязкости и их классификация

Для исключения мелкомасштабных пульсаций на этапе постановки задачи вводится оператор фильтрации по пространству, подавляющий коротковолновые составляющие турбулентного движения. При этом результирующая система уравнений оказывается незамкнутой, поскольку включает в себя члены, описывающие нелинейные взаимодействия крупных вихрей с мелкомасштабной турбулентностью, лежащей за пределами пространственного шага модели. Параметризация таких взаимодействий (вычисление на основе известной информации о сглажен-

ных флуктуациях скорости), называемая подсеточной моделью, составляет одну из важных проблем метода моделирования крупных вихрей.

Компоненты тензора подсеточных напряжений, возникающих в результате фильтрации уравнения изменения количества движения, определяются соотношением

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j.$$

Волна относится к фильтрованным величинам. Обычно используется следующее разложение

$$\tau_{ij} = \underbrace{\widetilde{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\widetilde{v}_i' \widetilde{v}_j + \widetilde{\widetilde{v}_i} v_j'}_{C_{ij}} + \underbrace{\widetilde{v_i' v_j'}}_{R_{ij}},$$

где R_{ij}, L_{ij}, C_{ij} — компоненты тензора рейнольдсовых, леонардовых и перекрестных напряжений. Штрих относится к величинам подсеточного масштаба ($v = \widetilde{v} + v'$).

Классификацию моделей турбулентности подсеточного масштаба поясняет рис. 3.1 (стрелки обозначают отношение использования).

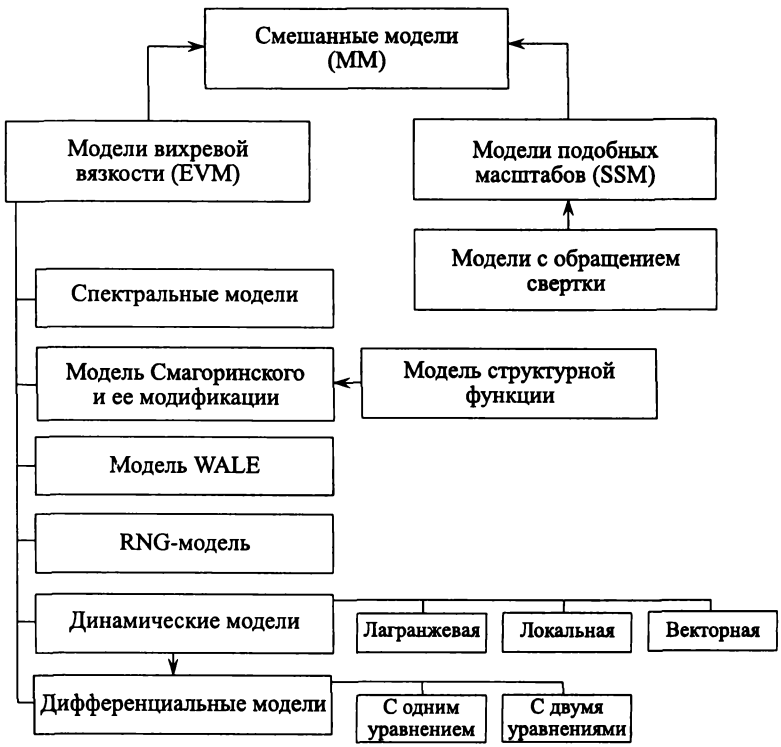


Рис. 3.1. Классификация подсеточных моделей

Необходимым (но в ряде случаев недостаточным) условием корректной работы подсеточных замыканий является способность модели правильно описывать диссипацию кинетической энергии сглаженных пульсаций скорости (способность замыкания имитировать прямой энергетический каскад от крупных вихрей к мелким). Такой каскад является основным механизмом перераспределения энергии в инерционном интервале трехмерной однородной и изотропной турбулентности (в области волновых чисел, в которой энергия не продуцируется и не диссипирует, а только перераспределяется между гармониками).

В силу стремления мелкомасштабных флуктуаций скорости к изотропии можно надеяться, что на практике среднестатистический эффект подсеточных взаимодействий описывается при помощи введения дополнительного коэффициента вихревой (подсеточной) вязкости (при моделировании подсеточных напряжений достаточно часто используется гипотеза Буссинеска).

Модели, основанные на введении вихревой вязкости (Eddy Viscosity Model, EVM), составляют наиболее широкий и представительный класс подсеточных моделей Подсеточная вихревая вязкость зависит либо от локальных параметров потока (модель Смагоринского и ее модификации, модель структурной функции), либо предыстории течения (динамические и дифференциальные модели, их комбинации и многочисленные модификации).

Общим недостатком всех моделей вихревой вязкости является довольно низкая корреляция моделируемых и реальных турбулентных напряжений и неспособность моделей данного класса описывать взаимодействия, приводящие к локальной генерации энергии крупных вихрей за счет мелкомасштабной подсеточной турбулентности (обратная передача энергии от мелких вихрей к крупным). Подобные обстоятельства ограничивают область применения моделей вихревой вязкости условием попадания пространственного разрешения в инерционный интервал спектра кинетической энергии. Это условие не всегда достижимо, например, при моделировании турбулентности в областях, ограниченных твердыми границами, где генерация турбулентной энергии происходит на масштабах, сравнимых с расстоянием от стенки. Похожие проблемы возникают, например, при моделировании турбулентных пограничных слоев в случае плотностной стратификации среды в поле силы тяжести.

Подсеточные модели вихревой вязкости содержат набор констант, которые определяются либо из физических соображений, либо подбираются эмпирически по результатам численных расчетов. Однако такие оценки не являются универсальными и даже в тех случаях, когда само замыкание оказывается применимым, параметрические константы подбираются исходя из особенностей моделируемого потока. Кроме того, в силу большой чувствительности LES к численным схемам, физические соображения не всегда оправданы.

В динамических подсеточных моделях используется предположение об инвариантности констант, входящих в замыкание, относительно эффективной ширины фильтрации [161]. Иными словами, предполагается, что одна и та же подсеточная модель применима как при более грубом, так и при более мелком пространственном разрешении. Имея решение на мелкой сетке, можно получить решение на более грубой сетке с помощью дополнительной (тестовой) фильтрации по пространству и получить для него оценку турбулентных напряжений. Некоторая часть этих напряжений, определяющая взаимодействия сглаженного (тестового) поля скорости с флуктуациями промежуточного масштаба, вычисляется явно или оценивается согласно выбранному замыканию. Затем константы, входящие в замыкание, выбираются таким образом, чтобы обеспечить минимальное различие между вычисленными явно и параметризованными вторыми моментами. На практике это приводит к задаче минимизации невязки переопределенной системы линейных уравнений, решение которой обеспечивает оптимальное (с точки зрения инвариантности модели относительно пространственного разрешения) распределение параметрических констант в пространстве и времени.

Идея подобия масштабов, лежащая в основе динамического подхода, часто используется при конструировании самого вида турбулентных замыканий. Простейшая модель подобных масштабов (Scale Similarity Model, SSM) предложена и проверена в работе [63]. В этой модели тензор турбулентных напряжений аппроксимируется путем формальной замены неизвестной (нефильтрованной) скорости на известную (фильтрованную) величину.

Модели подобных масштабов, а также модели с обращением свертки, обладают рядом преимуществ по сравнению с моделями вихревой вязкости. В частности, они способны обеспечивать локальную генерацию турбулентной энергии, имитируя обратный каскад энергии от мелких вихрей к крупным. Это свойство оказывается важным для моделирования анизотропных турбулентных потоков при реализации процесса самоорганизации мелкомасштабной турбулентности в квазикогерентные крупномасштабные структуры. Модели, построенные из соображений подобия, отличаются друг от друга выбором фильтров и масштабирующих множителей. Модели SSM являются недостаточно диссипативными, что ставит вопрос о необходимости стабилизации соответствующих численных расчетов.

Достоинства моделей вихревой вязкости и моделей подобных масштабов объединяют смешанные модели (Mixed Model, MM) при одновременном устранении или смягчении недостатков. Смешанные модели также реализуются в динамической постановке (Dynamic Mixed Model, DMM).

В отличие от моделей вихревой вязкости, в моделях подобных масштабов и смешанных моделях оператор фильтрации по пространству используется в явном виде. В том случае, когда фильтр имеет

гладкую в спектральном пространстве функцию пропускания, модели этого класса параметризуют не только часть подсеточных взаимодействий, но и часть взаимодействий в разрешаемом диапазоне масштабов, подавляемых фильтрацией. Это позволяет рассматривать смешанные модели как модели с явной фильтрацией. При численной реализации LES снижается роль ошибок, связанных с конечно-разностной дискретизацией основных уравнений.

Для уменьшения роли численных ошибок проводится моделирование только относительно крупных вихрей на достаточно мелкой сетке. При этом считается, что пространственный фильтр задан заранее, а его свойства известны. Такая концепция носит название явной фильтрации и реконструкции [165, 228]. Общепринятого подхода к построению расчетных схем, основанных на явной фильтрации, и замыканий к ним на данный момент нет. Известно, что модели, основанные на явной фильтрации, оказываются более чувствительными к выбору подсеточного замыкания. Кроме того, в данном случае уместно говорить не о подсеточном, а о подфильтровом замыкании.

3.2. Модели вихревой вязкости

Модели вихревой вязкости составляют наиболее представительный класс подсеточных моделей. Несмотря на известные ограничения и недостатки, модели данного типа широко используются в вычислительной практике. Наиболее известной из моделей вихревой вязкости является модель Смагоринского, являющаяся аналогом модели пути смешения Прандтля в полуэмпирической теории турбулентности.

3.2.1. Модель Смагоринского и ее модификации. В моделях вихревой вязкости компоненты тензора подсеточных напряжений находятся из соотношения

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_{\text{sgs}}\widetilde{s}_{ij}, \tag{3.1}$$

где

$$\widetilde{s}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i}\right).$$

Вязкость имеет размерность $[\nu_{\text{sgs}}] = L^2T^{-1}$. В качестве линейного масштаба выбирается размер шага разностной сетки $l \sim \Delta$ (ширина фильтра). Выбор масштаба скорости не является очевидным (в отличие от полуэмпирической теории турбулентности, в которой в качестве масштаба скорости выбирается величина $k^{1/2}$, а линейный масштаб требует оценки). Вместо градиента скорости $\partial u/\partial y$ обычно выбирается инвариант тензора скоростей деформаций.

Исторически модель Самгоринского (Smagorinsky model) была одной из первых моделей, предложенных для расчета подсеточной вихре-

вой вязкости [297]. Она использовалась для метеорологических исследований, а расчеты проводились на сетке $20 \times 20 \times 20$.

В модели Смагоринского подсеточная вихревая вязкость вычисляется по формуле [297]

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_S\Delta)^2\,|\widetilde{s}|, \quad |\widetilde{s}| = (2\widetilde{s}_{ij}\widetilde{s}_{ij})^{1/2}, \tag{3.2}$$

где C_S — коэффициент модели (постоянная Смагоринского), Δ — ширина фильтра, которая обычно связывается с размером шага или объемом ячейки разностной сетки.

Для оценки параметра Смагоринского используется закон Колмогорова–Обухова $E(\kappa) = C_k\kappa^{-5/3}\varepsilon^{2/3}$, где C_k — постоянная Колмогорова ($C_k = 1{,}4 \div 2{,}2$). Учитывая связь между скоростью диссипации и спектральной плотностью кинетической энергии турбулентности

$$\varepsilon = \nu_{\text{sgs}}\,|\widetilde{s}|^2 = 2\nu_{\text{sgs}}\int\limits_0^{\kappa_c}\kappa^2 E(\kappa)\,d\kappa = \frac{2}{3}\,C_k\nu_{\text{sgs}}\varepsilon^{2/3}\kappa_c^{4/3} \tag{3.3}$$

и полагая волновое число отсечки равным $\kappa_c = \pi/\Delta$, после подстановки соотношения (3.3) в (3.2), получим следующую оценку параметра Самгоринского

$$C_S = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3C_k}\right)^{3/4},$$

причем $C_S = 0{,}151$ при $C_k = 1{,}8$.

Применяется и более общий подход, связанный с представлением спектральной плотности в степенном виде

$$\frac{\widetilde{E}(\kappa)}{E(\kappa)} = a\left(\frac{\kappa}{\kappa_c}\right)^b,$$

где $a = 0{,}35$, $b = 6{,}66$. Проводя оценку скорости диссипации по соотношению вида (3.3), получим соотношение

$$C_S = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3C_k^{3/2}}\,\frac{(3b+4)^{1/2}}{6a}\right]^{1/2},$$

причем $C_S = 0{,}255$ при $C_k = 1{,}8$.

Как правило, значение параметра Смагоринского выбирается из диапазона $C_S = 0{,}06 \div 0{,}28$, в частности, $C_S = 0{,}1, 0{,}15$ и $0{,}18$ для течения в канале, течения в свободном слое смешения и однородной и изотропной турбулентности [255]. Во многих случаях параметр Смагоринского является функцией пространственных координат и времени, а также зависит от условий и геометрии течения. Например, в расчетах пристеночных течений необходимо учитывать зависимость C_S от расстояния до стенки [268]. Сдвиг (градиент скорости) уменьшает величину параметра Смагоринского до значения $C_S = 0{,}065$. Для

неизотермических течений значение параметра Смагоринского обычно меньше, чем для изотермических [84].

Соотношение (3.2) удобно переписать в виде

$$\nu_{\text{sgs}} = l^2 |\widetilde{s}|,$$

где $l = C_S \Delta$ представляет собой подсеточный аналог длины перемешивания Прандтля.

В модифицированной модели Смагоринского, называемой моделью Смагоринского–Лилли (Smagorinsky–Lilly model), длина перемешивания выбирается исходя из условия [221]

$$l = \min \{C_S \Delta, \varkappa y\},$$

где y — расстояние до стенки, $\varkappa$ — постоянная Кармана (обычно $\varkappa = 0{,}42$). На равномерной сетке ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$) ширина фильтра обычно полагается равной шагу разностной сетки. На неравномерной сетке длина перемешивания представляется в виде

$$l = C_S \Delta f_\delta.$$

Функция f_δ зависит от отношения шагов сетки $a_1 = \Delta x_1 / \Delta x_3$ и $a_2 = \Delta x_2 / \Delta x_3$ (считается, что $\Delta x_1 \leqslant \Delta x_2 \leqslant \Delta x_3$). В частности, для изотропной турбулентности хорошие результаты дает выбор [289]

$$f_\delta = \cosh \left\{ \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[(\log a_1)^2 - \log a_1 \log a_2 + (\log a_2)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

В модели Ван Дриста (Van Driest model) влияние стенки на длину перемешивания учитывается при помощи введения демпфирующей функции в формулу Смагоринского

$$l = C_S \Delta f_\mu.$$

Демпфирующая функция Ван Дриста имеет вид

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-y^+ / A \right) \right],$$

где A — эмпирическая постоянная ($A = 25$). Под y^+ понимается расстояние до стенки, выраженное в пристеночных единицах ($y^+ = u_\tau y / \nu$).

При моделировании полностью развитого течения в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане демпфирующая функция выбирается в виде [89]

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-y^+ / A \right) \right] \left[1 - \exp \left(-z^+ / A \right) \right],$$

где y^+ и z^+ — расстояния до стенки вдоль соответствующих координатных осей (оси y и z связываются с поперечным сечением канала).

Для улучшения асимптотического поведения подсеточной вязкости в пристеночной области находит применение иное представление демп-

фирующей функции [89, 187], учитывающее влияние угловых точек канала

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(-d^+/A\right)\right]^{3/2},$$

где

$$d = \frac{2yz}{y + z + \left(y^2 + z^2\right)^{1/2}}.$$

При этом $d \to y$, если $y/z \to 0$, и $d \to z$, если $z/y \to 0$.

Для расчета расстояния до стенки в окрестности угловых точек расчетной области используется соотношение

$$\frac{1}{y} = \oint_\theta \frac{d\theta}{2r(\theta)},$$

где r — радиус, θ — полярный угол.

В демпфирующем множителе Ван Дриста при расчете величины y^+ используется величина трения на стенке, которое обращается в ноль в точке отрыва потока. Для преодоления этого недостатка используется вторичная фильтрация поля скорости, а вихревая вязкость находится из соотношения [348]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_{vS} f_w \Delta u, \quad u = \left[\left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i\right)^2\right]^{1/2},$$

где

$$f_w = 1 - \exp\left[-\left(C_w \frac{u}{\Delta|\widetilde{s}|}\right)^2\right].$$

Модельные параметры C_{vS} и C_w подбираются из условия согласования расчетных и экспериментальных данных. В качестве тестового фильтра используется либо фильтр с полосой пропускания, связанной с размером шага расчетной сетки, либо явный дискретный фильтр [203].

Несмотря на улучшение предсказаний характеристик потока в пристеночной области течения по сравнению с моделью Смагоринского, модель Ван Дриста не имеет должного физического обоснования.

Для учета влияния шероховатости поверхности на длину перемешивания $l = C_S \Delta f_r$ используются различные виды демпфирующих функций. Наиболее распространенным является подход, в котором длина перемешивания выражается через расстояние до стенки y и среднюю величину шероховатости поверхности y_0 [86, 237]

$$\frac{1}{l^n} = \frac{1}{l_0^n} + \frac{1}{\left[\varkappa(y + y_0)\right]^n},$$

где l_0 — длина перемешивания вдали от стенки (в области однородной и изотропной турбулентности), равная $l_0 = C_S \Delta$. Показателю степени присваивается значение $n = 1$ [272] или $n = 2$ [81, 237] (такой выбор

гарантирует, что вблизи стенки $l \sim y$). При $n = 2$ выражение для демпфирующей функции принимает вид

$$f_r = \left\{1 + \left[\frac{C_S\Delta}{\varkappa(y + y_0)}\right]^2\right\}^{-1/2}.$$

Модель Смагоринского приводит к неудовлетворительным результатам при расчете течений с кривизной линий тока. Для учета кривизны линий тока подсеточная вязкость, вычисленная по формуле (3.2), умножается на демпфирующую функцию, зависящую от подсеточного числа Ричардсона [292]

$$f(\mathrm{Ri}_{\mathrm{sgs}}) = \left(1 - \beta \mathrm{Ri}_{\mathrm{sgs}}\right)^{1/2},$$

где β — эмпирическая постоянная ($\beta \sim 1$). Число Ричардсона вычисляется по величине инварианта тензора скоростей деформаций и тензора вращения

$$\mathrm{Ri}_{\mathrm{sgs}} = \frac{|\widetilde{\omega}|^2}{|\widetilde{s}|^2} + \frac{|\widetilde{\omega}|}{|\widetilde{s}|}, \quad \widetilde{\omega} = (2\widetilde{\omega}_{ij}\widetilde{\omega}_{ij})^{1/2}.$$

Другой способ введения числа Ричардсона предполагает его зависимость от ширины фильтра (линейный масштаб) и скорости деформации (масштаб скорости)

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{sgs}} = \frac{\Delta^2 |\widetilde{s}|}{\nu}.$$

Увеличение числа Ричардсона приводит к уменьшению подсеточной вязкости (при этом следует отметить возможность немонотонной зависимости подсеточной вязкости от числа Ричардсона).

Модель вихревой вязкости Смагоринского основана на предположении о локальном равновесии генерации и диссипации подсеточной турбулентности. Имеются модификации модели Смагоринского, свободные от этого допущения [94]. Они разработаны для расчетов стратифицированных и сдвиговых течений (для течения с однородным сдвигом $C_S = 0{,}08 \div 0{,}12$).

При необходимости учета влияния сил плавучести подсеточная вязкость вычисляется по формуле [222, 265]

$$\nu_{\mathrm{sgs}} = (C_S\Delta)^2 \left(|\widetilde{s}|^2 - \frac{1}{\mathrm{Fr}\,\mathrm{Pr}_{\mathrm{sgs}}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i}\delta_{ii}\right)^{1/2},$$

где Fr — число Фруда. В изотермических условиях $\partial\widetilde{T}/\partial x_i = 0$, и приведенная модель сводится к модели Смагоринского, описываемой соотношением (3.2).

Для того, чтобы учесть предысторию течения в рамках модели Смагоринского, вводится зависимость модельного коэффициента от

локальных параметров потока [249] (Variable Length Scale Smagorinsky model)

$$C_S = C_{S0}\left(1 + C_A \frac{d|\widetilde{s}|}{dt}\right),$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Значение эмпирического коэффициента C_A зависит от предыстории и типа течения. Более обоснованный учет предыстории течения состоит в использовании динамической модели.

Используя модель Смагоринского (3.2), вычислим подсеточную диссипацию турбулентной энергии

$$\varepsilon_{\text{sgs}} = \tau_{ij}\widetilde{s}_{ij} = -2\nu_{\text{sgs}}\widetilde{s}_{ij}\widetilde{s}_{ij}.$$

Приведенное выражение показывает, что модель Смагоринского является диссипативной ($\varepsilon_{\text{sgs}} \geqslant 0$).

Модель Смагоринского обладает значительной диффузией и диссипацией, что позволяет стабилизировать численные расчеты. Результаты прямого численного моделирования показывают, что в некоторых ситуациях (например, в полностью развитом турбулентном течении в канале около стенки) возможна обратная передача энергии — от мелких вихрей к крупным (в англоязычной литературе используется словосочетание reverse transition, back-scatter или B-scatter — в отличие от передачи энергии от крупных вихрей к мелким — forward-scatter или F-scatter). С математической точки зрения, это означает, что $\nu_{\text{sgs}} < 0$. В соответствии с формулой (3.2), эффекты отрицательной вязкости и обратной передачи энергии в модели Смагоринского не учитываются [267].

Один из способов сделать модель Смагоринского менее диссипативной состоит в том, чтобы добавлять диссипацию только в тех областях течения, которые характеризуются существенными изменениями величины вихря скорости и его направления. Такой подход, реализованный для более сложной модели в работе [218], применим и к модели Смагоринского [308]. В модели Смагоринского с ограничением (Selective Smagorinsky, SS) вводится функция-переключатель такая, что [193]

$$\phi(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta \geqslant \beta_0, \\ 0, & \text{если } \beta < \beta_0, \end{cases}$$

где

$$\beta = \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t)}{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)||\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t)|}.$$

Подсеточная вязкость полагается равной $\nu_{\text{sgs}} = \phi(\beta)\nu_{\text{sgs}}^{\text{SM}}$, где $\nu_{\text{sgs}}^{\text{SM}}$ вычисляется по формуле (3.2). Пороговое значение параметра β определяется из результатов прямого численного моделирования, в частности, в работе [308] полагается, что $\beta = 15°$.

3.2.2. Модель структурной функции. Структурная функция 2-го порядка играет существенную роль в теории турбулентности и связывается с пространственной корреляционной функцией и спектральной плотностью кинетической энергии турбулентности [41].

В модели структурной функции (Structure Function, SF) подсеточная вязкость вычисляется по формуле [218]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_F \Delta \left[\widetilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t)\right]^{1/2}, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t) = \langle [\widetilde{v}_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) - \widetilde{v}_i(\mathbf{x}, t)]\, [\widetilde{v}_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) - \widetilde{v}_i(\mathbf{x}, t)] \rangle_{|\mathbf{r}|=\Delta}.$$

Постоянной модели присваивается значение $C_F = 0{,}105 C_k^{-3/2}$. Угловые скобки обозначают осреднение по точкам, для которых $|\mathbf{r}| = \Delta$.

Структурная функция связывается с трехмерным волновым спектром изотропной турбулентности

$$\widetilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t) = 4 \int_0^{\kappa_c} E(\kappa, t) \left[1 - \frac{\sin(\kappa\Delta)}{\kappa\Delta}\right] d\kappa. \tag{3.5}$$

Нетрудно также связать сторуктурную функцию 2-го порядка с подсеточной кинетической энергией

$$\widetilde{D}_{2\Delta}(r) \sim k_{\text{sgs}}^2.$$

С вычислительной точки зрения, преимуществом модели структурной функции является использование приращений скорости вместо ее производных. Модель дает более точные результаты для переходных течений, чем модель Смагоринского.

Для подавления высокочастотных флуктуаций скорости, приводящих к численной неустойчивости, в модели фильтрованной структурной функции (Filtered Structure Function, FSF) перед вычислением структурной функции 2-го порядка к разрешимому полю скорости трижды итерационно применяется дискретный фильтр, использующий центрированные разности 2-го порядка [143], что дает $\widehat{E}(\kappa)/E(\kappa) \approx 40^3(\kappa/\kappa_c)^2$. Формула для подсеточной вязкости принимает вид (3.4), но с другим значением модельного коэффициента $C_F = 0{,}0014 C_k^{-3/2}$.

Модель FSF применяется для расчетов переходных режимов течения в пограничном слое.

В модели структурной функции с ограничением (Selective Structure Function, SSF) подсеточная вязкость вычисляется по формуле [218]

$$\nu_{\text{sgs}} = \phi(\mathbf{x}, t) C_F \Delta \left[\widetilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t)\right]^{1/2},$$

где $C_F = 0{,}16 C_k^{-3/2}$.

Функция-переключатель выбирается в виде

$$\phi(\mathbf{x},t)=\begin{cases}1, & \text{если } \beta\geqslant\beta_0,\\ 0, & \text{если } \beta<\beta_0.\end{cases}$$

Параметр β представляет собой угол между локальным вихрем ω и его фильтрованным значением $\widetilde{\omega}$, рассчитанным при помощи осреднения значений из соседних точек

$$\widetilde{\omega}(\mathbf{x},t)=\langle\omega(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rangle_{|\mathbf{r}|=\Delta}.$$

Пороговое значение угла β_0 соответствует наиболее вероятному значению, полученному из моделирования изотропной турбулентности (обычно $\beta_0=20°$). Подсеточная вязкость стремится к нулю, если течение не является полностью турбулентным (при $\beta<\beta_0$).

В работе [308] используется гладкий переключатель, представляемый в следующем виде

$$\phi(\mathbf{x},t)=\begin{cases}0, & \text{если } \beta<\beta_1,\\ \exp\left(-d\beta/3\right)^2, & \text{если } \beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2,\\ 0, & \text{если } \beta>\beta_2,\end{cases}$$

где $d\beta=|\beta-\beta_2|$, $\beta_1=10°$, $\beta_2=20°$.

Используя разложение в ряд Тэйлора, нетрудно показать, что структурная функция представляется в виде

$$\widetilde{D}_{2\Delta}\simeq\Delta x_i\Delta x_k\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_i}\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_k}.$$

Градиент скорости выражается в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=s_{ij}+\omega_{ij}.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $s_{ij}\omega_{ij}$, на равномерной сетке ($\Delta x_i=\Delta$) получим, что структурная функция имеет вид

$$\widetilde{D}_{2\Delta}\simeq\Delta^2\left(|\widetilde{s}|^2+|\widetilde{\omega}|^2\right),$$

а подсеточная вязкость вычисляется по формуле

$$\nu_{\text{sgs}}=C_F\Delta^2\left(|\widetilde{s}|^2+|\widetilde{\omega}|^2\right)^{1/2}.$$

Модель структурной функции представляет собой одну из модификаций модели Смагоринского [297].

Сохранение в разложении в ряд Тэйлора слагаемых более высокого порядка малости приводит к следующему соотношению для подсеточной вязкости

$$\nu_{\text{sgs}} = C_F \Delta^2 \left(|\widetilde{s}|^2 + |\widetilde{\omega}|^2\right)^{1/2} \left[1 + \frac{\Delta^2}{\left(|\widetilde{s}|^2 + |\widetilde{\omega}|^2\right)^2} \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{v}_i}{\partial x_j \, \partial x_k}\right)^2\right].$$

Расчеты показывают, что модель структурной функции дает реалистичные результаты для течений, близких к изотропным [143] (в этом случае разница между моделью Смагоринского и моделью структурной функции мала, поскольку $|\widetilde{s}|^2 \sim |\widetilde{\omega}|^2$). Для сдвиговых течений модель приводит к завышенным диссипативным эффектам [268].

3.2.3. Модель WALE. Модель Смагоринского дает ненулевое значение подсеточной вязкости на стенке, где существует ненулевой градиент скорости. Вместе с тем, подавление турбулентных флуктуаций вблизи стенки приводит к тому, что $\nu_{\text{sgs}} \to 0$ при $y \to 0$.

В модели Ван Дриста для учета подавления турбулентных флуктуаций вблизи стенки вводится демпфирующая функция экспоненциального вида. При этом $\nu_{\text{sgs}} \sim O(y^2)$ вместо $\nu_{\text{sgs}} \sim O(y^3)$, что следует из модели Смагоринского. Модель Ван Дриста требует вычисления расстояния до стенки, что приводит к определенным трудностям при расчете течений в областях сложной геометрии на неструктурированных сетках.

В модели структурной функции $\widetilde{D}_{2\Delta} \sim O(1)$ около стенки при условии, что расчет производится при помощи статистического осреднения квадрата разности скорости потока в данной точке и 6 соседних точках на структурированной сетке. При использовании для осреднения только 4-х точек, лежащих в плоскости, параллельной стенке, получается, что $\widetilde{D}_{2\Delta} \sim O(y)$. Осреднение по 4 точкам применяется при моделировании течений в пограничном слое на плоской пластине [143].

Рациональный путь построения модели, пригодной для моделирования пристеночных и переходных режимов течения, состоит в модификации значения параметра Смагоринского таким образом, чтобы $C_S \to 0$ вблизи стенки при сохранении зависимости вихревой вязкости только от локальных характеристик потока в данной точке (например, от градиента скорости и величин с ним связанных).

В локальной модели вихревой вязкости, адаптированной для расчета пристеночных течений (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity, WALE), подсеточная вязкость находится из соотношения, удовлетворяющего поведению характеристик турбулентности в пограничном слое, в котором $\nu_{\text{sgs}} \sim y^{+3}$. Формула для расчета подсеточной вязкости имеет следующий вид [145, 256]

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_W \Delta)^2 \frac{\left(\widetilde{s}^d_{ij} \widetilde{s}^d_{ij}\right)^{3/2}}{\left(\widetilde{s}_{ij} \widetilde{s}_{ij}\right)^{5/2} + \left(\widetilde{s}^d_{ij} \widetilde{s}^d_{ij}\right)^{5/4}},$$

где

$$\widetilde{s}_{ij}^d = \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{g}_{ji}^2\right) - \frac{1}{3}\widetilde{g}_{kk}^2\delta_{ij}, \quad \widetilde{g}_{ij}^2 = \widetilde{g}_{ik}\widetilde{g}_{kj}, \quad \widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial x_j}.$$

Дополнительной постоянной присваивается значение $C_W = 0{,}325$. Модель WALE учитывает как растяжение, так и вращение вихрей, соответствующих разрешимым масштабам скорости.

Для плоской пластины, лежащей в плоскости $y = 0$, поле скорости описывается соотношениями

$$\widetilde{u} = u_1 y + u_2 y^2 + O(y^3);$$
$$\widetilde{v} = v_2 y^2 + O(y^3);$$
$$\widetilde{w} = w_1 y + w_2 y^2 + O(y^3).$$

При этом $v_1 = 0$, поскольку $\partial\widetilde{v}_i/\partial x_i = 0$ в силу уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости.

В случае несжимаемой жидкости $\widetilde{g}_{ii} = \widetilde{s}_{ii} = 0$ и $\langle\widetilde{g}_{ij}\widetilde{g}_{ji}\rangle = 0$ (угловые скобки обозначают осреднение по ансамблю реализаций). Используя представление градиента скорости в виде $g_{ij} = (s_{ij} + \omega_{ij})/2$, получим

$$\widetilde{s}_{ij}^d = \widetilde{s}_{ik}\widetilde{s}_{kj} + \widetilde{\omega}_{ik}\widetilde{\omega}_{kj} = \frac{1}{3}\left(\widetilde{s}_{mn}\widetilde{s}_{mn} - \widetilde{\omega}_{mn}\widetilde{\omega}_{mn}\right)\delta_{ij}.$$

Умножая приведенное соотношение само на себя и применяя для упрощения теорему Гамильтона, запишем

$$\widetilde{s}_{ij}^d\widetilde{s}_{ij}^d = \frac{1}{6}\left(\widetilde{s}^2\widetilde{s}^2 + \widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}^2\right) + \frac{2}{3}\widetilde{s}^2\widetilde{\omega}^2 + 2IV_{s\omega},$$

где

$$\widetilde{s}^2 = \widetilde{s}_{ij}\widetilde{s}_{ij}, \quad \widetilde{\omega}^2 = \widetilde{\omega}_{ij}\widetilde{\omega}_{ij}, \quad IV_{s\omega} = \widetilde{s}_{ik}\widetilde{s}_{kj}\widetilde{\omega}_{jl}\widetilde{\omega}_{li}.$$

В течении чистого сдвига $\widetilde{g}_{12} \neq 0$, поэтому $\widetilde{s}^2 = \widetilde{\omega}^2 = 4\widetilde{s}_{12}$ и $IV_{s\omega} = -\widetilde{s}^2\widetilde{s}^2/2$, что дает $\widetilde{s}_{ij}^d\widetilde{s}_{ij}^d = 0$.

Модельная постоянная C_W определяется из условия, что модель WALE дает такую же подсеточную диссипацию, как и модель Смагоринского. В частности, для однородной и изотропной турбулентности $C_W = 0{,}5$ (при $C_S = 0{,}18$).

Модель WALE является инвариантной к параллельному переносу и вращению. С вычислительной точки зрения, удобство использования модели заключается в том, что она не дает ни отрицательных, ни бесконечных значений подсеточной вязкости, обеспечивая хорошую обусловленность вычислительного алгоритма.

3.2.4. RNG-модель. В модели, построенной на основе теории ренормализованных групп (Renormalization Group, RNG), расчет эф-

фективной вязкости сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения [344]

$$\mu_{\text{eff}} = \mu\Big[1 + H(X - C)\Big]^{1/3}, \quad X = \frac{\mu_{\text{sgs}}^2 \mu_{\text{eff}}}{\mu^3}, \tag{3.6}$$

где $H(X)$ — функция Хевисайда, $C = 100$. Подсеточная вязкость находится из соотношения, записанного в форме (3.2), но с другим значением модельного параметра

$$\mu_{\text{sgs}} = \overline{\rho}\,(C_R\Delta)\,|\widetilde{s}|^2.$$

Постоянной модели присваивается значение $C_R = 0{,}157$. При $X \gg C$ получается формула Смагоринского со следующим значением модельного коэффициента

$$C_{\text{S}} = \frac{(2C_R)^{1/4}}{2\pi} = 0{,}119.$$

В полностью турбулентной области течения $\mu_{\text{sgs}} \gg \mu$, поэтому $\mu_{\text{eff}} \simeq \mu_{\text{sgs}}$. В этом случае RNG-модель сводится к модели Смагоринского с другим значением постоянного множителя. В слабо турбулентной области аргумент функции Хевисайда становится отрицательным, в связи с чем $\mu_{\text{eff}} \simeq \mu$. Корректное предсказание эффективной вязкости в полностью турбулентной и ламинарной области потока делает возможным использование RNG-модели для расчетов пристеночных и переходных режимов течения.

Преимущество RNG-модели перед моделью Смагоринского состоит в том, что она позволяет учесть демпфирующее влияние стенки без введения пристеночных функций [269] (при соответствующем сеточном разрешении в пограничном слое).

3.2.5. Динамические модели. В динамических моделях (Dynamic Model, DM) для оценки параметра Смагоринского используется информация, содержащаяся в разрешимых масштабах скорости [160, 161]. Помимо фильтрации с сеточным фильтром, используется вторичная фильтрация поля скорости с фильтром, полоса пропускания которого превышает ширину сеточного фильтра.

3.2.5.1. Построение динамической процедуры. Общий подход к построению динамической процедуры, не предполагающий использования какой-либо конкретной подсеточной модели в качестве базовой, развит в работе [160].

В динамической модели общего вида для оценки параметров подсеточной модели используется два фильтра. Помимо сеточного фильтра (grid filter), вводится так называемый пробный или тестовый фильтр (test filter), полоса пропускания которого $\widehat{\Delta}$ превышает ширину сеточного фильтра Δ, используемого для фильтрации уравнений Навье–Стокса (обычно полагается $\widehat{\Delta} = 2\Delta$). Фильтр Δ соответствует точному решению фильтрованных уравнений Навье–Стокса при $\kappa = \kappa_m$.

Фильтр $\widehat{\Delta}$ соответствует решению, имеющему бóльшие разрешимые масштабы и более низкие волновые числа $\kappa = \kappa_m/2$ (рис. 3.2).

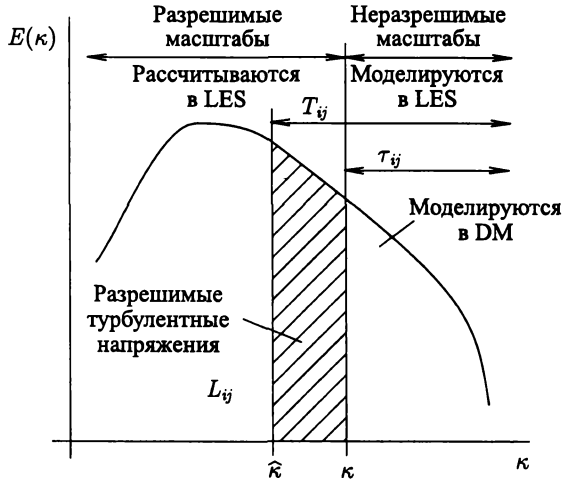


Рис. 3.2. Сеточный и тестовый фильтры в динамической модели

Спектры кинетической энергии турбулентности, построенные на основе мгновенной скорости u, фильтрованной скорости $\widetilde{u}$ и дважды фильтрованной скорости $\widehat{\widetilde{u}}$ показаны на рис. 3.3 (тильда соответствует сеточному фильтру, а крышка — пробному).

Поля скорости, отвечающие исходному и тестовому фильтрам, обозначим через $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ и $\widehat{\widetilde{\mathbf{v}}}(\mathbf{x},t)$. Компоненты тензоров подсеточных напряжений τ_{ij} и T_{ij}, соответствующие этим полям скорости, имеют вид

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j = -2C\alpha_{ij};$$
$$T_{ij} = \widehat{\widetilde{v_i v_j}} - \widehat{\widetilde{v}}_i \widehat{\widetilde{v}}_j = -2C\beta_{ij}.$$

Здесь

$$\widetilde{v}_i(\mathbf{x},t) = v_i(\mathbf{x},t) * g(\mathbf{x});$$
$$\widehat{\widetilde{v}}_i(\mathbf{x},t) = \widetilde{v}_i(\mathbf{x},t) * \widehat{g}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x},t) * g(\mathbf{x}) * \widehat{g}(\mathbf{x}).$$

Звездочка обозначает операцию свертки.

Связь между тензорами подсеточных напряжений дается соотношением

$$T_{ij} = \widehat{\tau}_{ij} + L_{ij}, \quad L_{ij} = \widehat{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widehat{\widetilde{v}}_i \widehat{\widetilde{v}}_j.$$

Используя произвольную подсеточную модель вихревой вязкости в качестве базовой и считая, что при вычислении компонент тензоров τ_{ij}

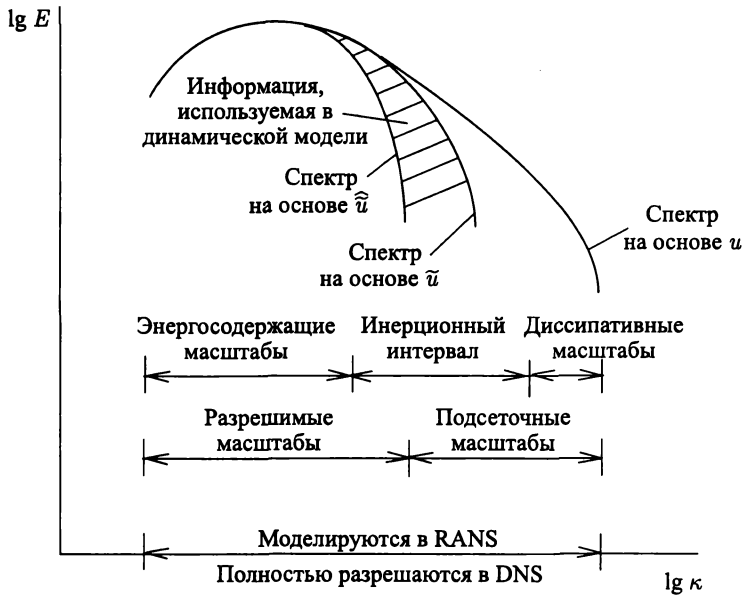


Рис. 3.3. Волновые спектры, построенные на основе мгновенной, фильтрованной и дважды фильтрованной скорости

и T_{ij} используется один и тот же постоянный множитель, запишем

$$\tau_{ij} = Cf(\widetilde{v}_i), \quad T_{ij} = Cf(\widehat{\widetilde{v}}_i).$$

Конкретные реализации динамической модели строятся с использованием одного из следующих соотношений

$$Cf(\widehat{\widetilde{v}}_i) = C\widehat{f(\widetilde{v}_i)} + L_{ij} \tag{3.7}$$

или

$$C^{n+1}f(\widehat{\widetilde{v}}_i) = C^n\widehat{f(\widetilde{v}_i)} + L_{ij}. \tag{3.8}$$

Индекс n соответствует шагу по времени.

Несмотря на то, что выражение (3.7) не является строго обоснованным с математической точки зрения [221], оно используется во многих моделях и, в частности, в модели Германо [161]. Выражение (3.8) используется в локализованной динамической модели.

3.2.5.2. Динамическая модель Германо. В динамической модели, построенной в работе Германо [161], для вычисления компонент тензоров подсеточных напряжений τ_{ij} и T_{ij}, соответствующих сеточному и пробному фильтру, используется модель вихревой вязкости Смагоринского, описываемая соотношением (3.2).

Считается, что плотность является функцией только времени, но не пространственных координат. Предполагая, что при вторичной фильтрации (фильтрации с тестовым фильтром) значение параметра Смагоринского не изменяется $C_S(\widehat{\Delta}) = C_S(\Delta)$, для тензоров подсеточных напряжений имеют место соотношения

$$\tau_{ij} = -2(C_S\Delta)^2|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij};$$
$$T_{ij} = -2(C_S\widehat{\Delta})^2|\widehat{\widetilde{s}}|\widehat{\widetilde{s}}_{ij}.$$

Компоненты тензора леонардовых напряжений L_{ij} равняются разности компонент тензоров подсеточных напряжений T_{ij} и $\widehat{\tau}_{ij}$ и находятся из соотношения

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} = -2C_S^2\left(\beta_{ij} - \widehat{\alpha}_{ij}\right) = -2\left(C_S\Delta\right)^2 M_{ij},$$

где

$$M_{ij} = \left(\frac{\widehat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 |\widehat{\widetilde{s}}|\widehat{\widetilde{s}}_{ij} - \widehat{|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}};$$

$$\alpha_{ij} = \Delta^2|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}; \quad \beta_{ij} = \widehat{\Delta}^2\widehat{|\widetilde{s}|}\widehat{\widetilde{s}}_{ij}.$$

Компоненты тензора L_{ij} учитывают вклад в напряжения Рейнольдса вихрей, размеры которых изменяются от Δ до $\widehat{\Delta}$.

Параметр Смагоринского находится по формуле

$$C_E = (C_S\Delta)^2 = -\frac{1}{2}\frac{L_{ij}}{M_{ij}}.$$

Для стабилизации численных расчетов используется его осреднение по однородным направлениям, а там, где это невозможно, применяется локальное осреднение (в исходной версии динамической модели осреднение не используется).

С вычислительной точки зрения, более предпочтительным оказывается подход, предложенный в работе [221]. Значение параметра Смагоринского выбирается исходя из минимизации ошибки, которую дает квадратичная форма $Q = E_{ij}E_{ij}$, где

$$E_{ij} = L_{ij} - T_{ij} + \widehat{\tau}_{ij} = L_{ij} + 2(C_S\Delta)^2 M_{ij}.$$

Используя метод наименьших квадратов и проводя осреднение по однородным направлениям, можно записать

$$\frac{\partial E^2}{\partial C_E} = \frac{\partial\left\langle E_{ij}E_{ij}\right\rangle}{\partial C_E} = 2\left\langle E_{ij}\frac{\partial E_{ij}}{\partial C_E}\right\rangle = 0.$$

Учитывая, что $\partial E_{ij}/\partial C_E = 2M_{ij}$, получим

$$\left\langle\left(L_{ij} + 2C_E M_{ij}\right)M_{ij}\right\rangle = 0.$$

Модельный параметр находится из соотношения

$$C_E = -\frac{1}{2}\frac{\langle L_{ij}M_{ij}\rangle}{\langle M_{kl}M_{kl}\rangle}. \tag{3.9}$$

Соотношение (3.9) иногда называется тождеством Германо (Germano's identity). В ряде случаев под ним понимается соотношение между компонентами тензоров напряжений, соответствующих сеточному и тестовому фильтрам.

Значение параметра Смагоринского, рассчитанное с помощью динамической процедуры, сильно колеблется в пространстве и времени. Например, при моделировании однородной и изотропной турбулентности

$$\langle C_D^2\rangle - \langle C_D\rangle^2 \approx 10\,\langle C_D\rangle^2,$$

где $C_D = C_S^2$.

Специфическая трудность, являющаяся результатом таких колебаний, состоит в том, что вихревая вязкость может стать отрицательной ($C_S < 0$). Такое обстоятельство означает перенос энергии от подсеточных вихрей к разрешимым масштабам [182] (в этом случае член генерации турбулентности становится отрицательным $\tau_{ij}\partial\widetilde{v}_i/\partial x_j < 0$). В принципе, в нестационарном потоке такой процесс может иметь место, приводя обычно к вычислительной неустойчивости. Для сглаживания флуктуаций модельного коэффициента, которые приводят к неустойчивости вычислительной процедуры, используется осреднение по однородным направлениям, демпфирующее высокочастотные гармоники решения. Одномерное осреднение не устраняет вычислительных трудностей, связанных со стабилизацией расчетов [52].

На временно́м шаге $n+1$ применяется нижняя релаксация, подавляющая высокочастотные осцилляции

$$C_S^{n+1} = (1-\chi)C_S^n + \chi C_S^*,$$

где χ — коэффициент нижней релаксации (на практике $\chi \sim 10^{-3}$).

Другой способ обеспечения устойчивости вычислительной процедуры состоит в наложении определенных ограничений на диапазон изменения модельного параметра. Самое простое требование заключается в том, чтобы положить $C_S \geqslant 0$ во всей расчетной области [233]. В этом случае динамическая модель, как и модель Смагоринского, является диссипативной и теряет способность предсказывать передачу энергии от мелких масштабов к крупным, поэтому ограничивается эффективная вязкость.

Для устранение недостатков осреднения используется следующая формула [187, 311], основанная на применении дискретного фильтра

$$\widehat{\widetilde{g}} = \widetilde{g} + \frac{1}{4}\left(\widetilde{g}_{i-1} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_i + \widetilde{g}_{i+1}\right) - \frac{\gamma^2-6}{96}\left(\widetilde{g}_{i-2} - 2\widetilde{g}_i + \widetilde{g}_{i+2}\right),$$

где $\gamma = \widehat{\Delta}/\Delta$ (обычно $\gamma = \sqrt{3}$).

Для учета влияния стенки динамическая процедура применяется к параметру $(C_S\Delta f)^2$. В точке отрыва или присоединения потока $u_\tau = 0$ и $f = 0$, что приводит к вычислительным трудностям в реализации такого подхода.

При использовании неструктурированной сетки динамическая процедура применяется в параметру $(C_S\Delta)^2$, а не к постоянной Смагоринского, как в случае структурированной сетки [92]. При этом отношение ширины тестового фильтра к ширине исходного фильтра полагается равным $\widehat{\Delta}/\Delta = N^{1/3}$, где N — число ячеек сетки, имеющих данный узел в качестве вершины.

В случае неравномерной сетки имеет место соотношение [290]

$$M_{ij} = 2\left\{\widehat{|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}} - \left[\frac{\Delta}{\widehat{\Delta}}\frac{f(a_1,a_2)}{f(\widehat{a}_1,\widehat{a}_2)}\right]^2 |\widehat{\widetilde{s}}|\widehat{\widetilde{s}}_{ij}\right\},$$

где a_1 и a_2 — отношения шагов разностной сетки. Если сеточный и тестовый фильтры имеют одинаковое отношение шагов, то выражения для функции $f(a_1, a_2)$, зависящей от отношений шагов сетки в различных координатных направлениях, не требуется.

В некоторых случаях для турбулентных струй считается, что $\tau_{ij} = -eL_{ij}$, где $e = 0{,}6 \div 0{,}8$ [123]. В общем случае величина e определяется по скорости подсеточной диссипации и зависит от отношения $\widehat{\Delta}/\Delta$, подсеточного числа Рейнольдса и степени разрешения крупных вихрей l/Δ, где l — интегральный масштаб турбулентности (для турбулентных струй $4 < l/\Delta < 70$).

В принципе, для расчета компонент тензоров τ_{ij} и T_{ij} могут использоваться различные подсеточные модели [96]. Разрабатываются модели, учитывающие члены более высокого порядка, кривизну линий тока [180] и сжимаемость [136].

Динамическая модель позволяет учесть ламинарно-турбулентный переход, кривизну линий тока, влияние сил плавучести, но дает неточные результаты в ламинарной области пограничного слоя [195]. Применение динамической модели требует формирования двух тензоров 2-го ранга в каждой точке расчетной области, компоненты которых являются функциями разрешимого поля скорости и разрешимого поля скоростей деформаций в соседних узлах (привлечение соседних узлов требуется для осреднения), что приводит к увеличению времени счета на временно́м шаге приблизительно на 20% по сравнению с расчетами без использования каких-либо подсеточных моделей [341].

Разложим градиент скорости на симметричную и антисимметричную составляющие

$$\widetilde{v}_{i,j} = \frac{1}{2}(\widetilde{v}_{i,j} + \widetilde{v}_{j,i}) + \frac{1}{2}(\widetilde{v}_{i,j} - \widetilde{v}_{j,i}) = \widetilde{s}_{ij} + \widetilde{\omega}_{ij}.$$

В теории пути смешения используется два выражения для расчета вихревой вязкости, в одном из которых фигурируют компоненты тензора

скоростей деформаций, а в другом — компоненты тензора вращения

$$\nu_{\text{sgs}} = l^2\,|\widetilde{s}\,|, \quad |\widetilde{s}\,| = (2\widetilde{s}_{ij}\widetilde{s}_{ij})^{1/2};$$
$$\nu_{\text{sgs}} = l^2\,|\widetilde{\omega}\,|, \quad |\widetilde{\omega}\,| = (2\widetilde{\omega}_{ij}\widetilde{\omega}_{ij})^{1/2}.$$

При использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса приведенные соотношения для вихревой вязкости являются эквивалентными для параллельных сдвиговых течений, когда $|\widetilde{s}\,| = |\widetilde{\omega}\,| = |\widetilde{u}_{1,2}\,|$. В случае LES, который является принципиально трехмерным подходом, такая эквивалентность не имеет места.

В одной из модификаций динамической модели (Modified Dynamic Model, MDM) компоненты тензоров подсеточных напряжений представляются в виде

$$\tau_{ij} = -2(C_{\text{S}}\Delta)^2|\widetilde{\omega}\,|\widetilde{s}_{ij};$$
$$T_{ij} = -2(C_{\text{S}}\widehat{\Delta})^2|\widehat{\widetilde{\omega}}\,|\widehat{\widetilde{s}}_{ij}.$$

Выражение для компонент тензора леонардовых напряжений имеет такой же вид, как и в исходной версии динамической модели [161]. В тоже время, полагается

$$M_{ij} = \left(\frac{\widehat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 |\widehat{\widetilde{\omega}}\,|\widehat{\widetilde{s}}_{ij} - |\widetilde{\omega}\,|\widetilde{s}_{ij} = \beta_{ij} - \widehat{\alpha}_{ij}.$$

Соотношения для коэффициентов α_{ij} и β_{ij} отличаются от тех, которые получены в модели [161].

Модифицированная версия динамической модели лучше предсказывает характеристики сдвиговых течений (в частности, течения Куэтта), чем ее исходная версия, сформулированная Германо.

Для вычисления компонент тензоров τ_{ij} и T_{ij} используется одно и то же значение параметра Смагоринского. Концепция пробного фильтра теоретически обоснована только в том случае, если имеет место локальное подобие структуры сеточной и подсеточной турбулентности (self-similarity assumption). Такое допущение не выполняется при малых значениях локального числа Рейнольдса, например, в пристеночной области потока [342].

Предположение о локальном подобии приводит к следующему соотношению между сеточным и тестовым фильтром

$$g(\mathbf{x}) = \delta^{-n}\widehat{g}(\mathbf{x}/\delta),$$

где $\delta = \widehat{\Delta}/\Delta$. Иными словами, сеточный и тестовый фильтры должны иметь одну и ту же форму (это имеет значение при явной фильтрации уравнений Навье–Стокса) и могут различаться лишь полосой пропускания. Вместе с тем, имеются формулировки динамической модели, не зависящие от вида тестового фильтра [96]. Однако их применение

на практике связано с вычислением многократных интегралов, что существенно увеличивает время счета.

В работах [234, 235] в качестве тестового фильтра используется явный дискретный фильтр, что позволяет уменьшить ошибку, связанную с некоммутативностью операций фильтрации и дифференцирования (коммутативность имеет место только при постоянной ширине фильтра — на равномерной сетке).

Для устранения недостатков динамической модели, связанных с использованием тестового фильтра, что важно, например, для расчетов на неструктурированных сетках, разрабатывается динамическая модель без вторичной фильтрации (Dynamic Model without Test Filtering). Фильтрация решения с тестовым фильтром заменяется оценкой производных высокого порядка разрешимого поля скорости [104].

Выражения для производных получаются при помощи разложения разрешимого поля скорости в ряд Тэйлора (данный подход имеет схожие черты с методом явной фильтрации и реконструкции) и применения метода наименьших квадратов.

Операции фильтрации с сеточным и тестовым фильтром определяются следующим образом

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\Delta}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi};$$

$$\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\widehat{\Delta}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) \widetilde{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Раскладывая функцию $\widetilde{f}(\mathbf{x})$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $\mathbf{x}$, вводя обозначение $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ и производя интегрирование, получим

$$\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial^n_{i_1 \dots i_n} \widetilde{f}|_{\mathbf{x}} \langle y_{i_1} \dots y_{i_n} \rangle,$$

где

$$\langle y_{i_1}, \dots, y_{i_n} \rangle = \int y_{i_1} \dots y_{i_n} G_{\widehat{\Delta}}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Для изотропного фильтра все члены четного порядка исчезают, поэтому можно положить, что $m = 2n$. Используя гауссовский фильтр, получим

$$\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{\Delta}^{2m}}{24^m m!} \left(\nabla^2\right)^m \widetilde{f}(\mathbf{x}).$$

Приведенные соотношения позволяют заменить фильтрацию с тестовым фильтром в динамической процедуре соотношениями, содержащими разрешимую скорость (фильтрованную скорость с сеточным фильтром) и ее производные.

Коэффициент Смагоринского рассчитывается по формуле (3.9), в которой

$$L_{ij} = -\frac{\widehat{\Delta}^2}{12}\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_k};$$

$$M_{ij} = -2\Delta^2\left\{\left(|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij} - \frac{\widehat{\Delta}^2}{\Delta^2}|\widetilde{s}^t|\widetilde{s}_{ij}\right) + \frac{\widehat{\Delta}^2}{24}\left[\nabla^2\left(|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}\right) - \frac{\widehat{\Delta}^2}{\Delta^2}|\widetilde{s}^t|\nabla^2\widetilde{s}_{ij}\right]\right\}.$$

Здесь

$$|\widetilde{s}^t| = \left[2\left(\widetilde{s}_{ij} + \frac{\widehat{\Delta}^2}{24}\nabla^2\widetilde{s}_{ij}\right)\right]^{1/2}.$$

В неоднородных турбулентных потоках следует использовать лагранжевую модификацию динамической модели [182], привлечение которой приводит к увеличению вычислительных расходов почти на 70% по сравнению с исходной версией модели [341].

3.2.5.3. Лагранжевая динамическая модель. В лагранжевой динамической модели (Lagrangian Dynamic Model, LDM) осреднение модельного параметра проводится вдоль траектории движения жидкой частицы [241].

Операция осреднения (Lagrangian averaging) определяется следующим образом

$$L_f = \langle f \rangle = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)W(t-\tau)\,d\tau.$$

Для простоты реализации весовая функция выбирается в виде

$$W(t-\tau) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right),$$

где T — временна́я постоянная.

Квадратичная форма, минимизация которой используется для нахождения величины параметра Смагоринского, имеет вид

$$Q = \left\langle (L_{ij} - C_S^2 M_{ij})^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(L_{ij} - C_S^2 M_{ij}\right)^2 W(t-\tau)\,d\tau.$$

Компоненты тензоров L_{ij} и M_{ij} вычисляются по тем же соотношениям, что и в исходной версии динамической модели [161]. При $\widehat{\Delta} = 2\Delta$ эти соотношения имеют вид

$$L_{ij} = C_S^2 M_{ij}, \quad M_{ij} = 2\Delta^2\left(\widehat{|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}} - 4|\widehat{\widetilde{s}}|\widehat{\widetilde{s}}_{ij}\right).$$

Метод наименьших квадратов приводит к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial L_{LM}}{\partial t} + \widetilde{v}_k \frac{\partial L_{LM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T}(L_{ij}M_{ij} - L_{LM}); \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial L_{MM}}{\partial t} + \widetilde{v}_k \frac{\partial L_{MM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T}(M_{ij}M_{ij} - L_{MM}). \tag{3.11}$$

Интегралы L_{LM} и L_{MM} находятся из соотношений

$$L_{LM} = \int\limits_{-\infty}^{t} L_{ij}(\mathbf{x},\tau)M_{ij}(\mathbf{x},\tau)W(t-\tau)\,d\tau;$$

$$M_{MM} = \int\limits_{-\infty}^{t} M_{ij}(\mathbf{x},\tau)M_{ij}(\mathbf{x},\tau)W(t-\tau)\,d\tau.$$

Параметр Смагоринского вычисляется по формуле

$$C_E^2 = \frac{1}{2}\frac{\langle L_{ij}M_{ij}\rangle}{\langle M_{ij}M_{ij}\rangle} = \frac{1}{2}\frac{L_{LM}(\mathbf{x},t)}{L_{MM}(\mathbf{x},t)}.$$

В лагранжевой версии динамической модели высокая точность решения дополнительных дифференциальных уравнений не требуется, поскольку проводится осреднение по «области влияния».

Дискретизация уравнений (3.10) и (3.11) обычно проводится при помощи схемы Эйлера по времени и противопоточной разностной схемы 1-го порядка по пространству. На шаге $n+1$ разностная схема имеет вид [241]

$$L_{LM}^{n+1}(\mathbf{x}) = H(x)\Big[(1-\varepsilon)L_{LM}^{n}(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{v}}^{n+1}\Delta t) + \varepsilon L_{ij}^{n+1}M_{ij}^{n+1}\Big];$$

$$L_{MM}^{n+1}(\mathbf{x}) = H(x)\Big[(1-\varepsilon)L_{MM}^{n}(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{v}}^{n+1}\Delta t) + \varepsilon M_{ij}^{n+1}M_{ij}^{n+1}\Big].$$

Функция $H(x)$ (ramp function) позволяет исключить появление малых отрицательных значений C_S, приводящих к численной неустойчивости и бесконечным значениям при оценке T^n. Функция имеет вид

$$H(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ 10^{-32} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Оценка интегралов в точке $\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{v}}^{n+1}\Delta t$ производится при помощи линейной интерполяции. Релаксационный параметр разностной схемы выбирается из условия

$$\varepsilon = \frac{\Delta t/T^n}{1 + \Delta t/T^n}.$$

Параметр T рассчитывается по эмпирически подобранному соотношению

$$T = \frac{3}{2}\Delta\left(-8L^n_{LM}L^n_{MM}\right)^{-1/8}.$$

В предельном случае $T \to \infty$, если $L_{LM} \to 0$. Для того чтобы избежать комплексных значений T, когда $C_S^2(\mathbf{x}, t) = 0$, полагается, что $L^n_{LM} = 0$.

С вычислительной точки зрения, лагранжевая модификация динамической модели оказывается на 20–30 % дороже модели Смагоринского. Модель находит применение для расчета атмосферных пограничных слоев.

3.2.5.4. Локальная динамическая модель. В динамической модели с локализацией (Dynamic Localization Model, DLM) для расчета параметра Смагоринского используется минимизация функционала

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q\,d\mathbf{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{ij}E_{ij}\,d\mathbf{x},$$

которая сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода [164, 165].

При наложении некоторых ограничений на параметр Смагоринского, например $C_S \geqslant 0$, интегральное уравнение является нелинейным. При отсутствии ограничений на параметр Смагоринского ($-\infty < C_S < +\infty$) решается линейное интегральное уравнение, что в существенной степени упрощает вычислительную процедуру.

Модель является довольно дорогой с вычислительной точки зрения, увеличивая время счета на 50 % [52], но не требует введения процедуры осреднения параметра Смагоринского. Время, необходимое для решения нелинейного интегрального уравнения, оказывается сравнимым со временем, затрачиваемым на решение уравнения Пуассона.

Вместо прямого решения интегрального уравнения используется итерационный подход (в качестве нулевого приближения модельного параметра на шаге $n+1$ по времени используется значение, полученное на предыдущем шаге). Такой подход приводит к сокращению времени счета, а стоимость модифицированной модели оказывается сравнимой с затратами на реализацию исходной версии динамической модели.

3.2.5.5. Векторная динамическая модель. В векторной динамической модели (Vector Dynamic Model, VDM) конвективные слагаемые в фильтрованном уравнении изменения количества движения записываются в виде [250, 251]

$$\frac{\partial\widetilde{v_i v_j}}{\partial x_j} = \frac{\delta\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j}{\delta x_j} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Ошибка, возникающая при дискретизации, трактуется как часть подсеточных напряжений. Используя пробный фильтр, можно записать

$$\frac{\partial\widehat{\overline{v_i}\overline{v_j}}}{\partial x_j} = \frac{\delta\widehat{\overline{v}}_i\widehat{\overline{v}}_j}{\delta x_j} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

В качестве исходного рассматривается не тензорное равенство, а векторное

$$C_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial\widehat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \quad C_i = C_{ij}^i, \quad C_{ij}^k = \frac{\delta\widehat{\overline{v}_i\overline{v}_j}}{\delta x_k} - \frac{\delta\widehat{\overline{v}}_i\widehat{\overline{v}}_j}{\delta x_k}.$$

После подстановки соотношений для τ_{ij} и T_{ij} динамическая процедура приводит к минимизации квадратичной формы $Q = E_iE_i$, где

$$E_i = C_i^* + 2M_i(C_S\Delta)^2 + 2M_{ij}\frac{\partial(C_S\Delta)^2}{\partial x_j};$$

$$C_i^* = C_i - \frac{1}{3}C_{kk}^j\delta_{ij}, \quad M_i = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}.$$

Квадратичная форма зависит не только от величины $(C_S\Delta)^2$, но и от ее производных по пространственным координатам. Как следствие, процедура осреднения не является локальной, что приводит к необходимости использования принципов вариационного исчисления для определения параметра Смагоринского. Расчет модельного параметра сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Для предотвращения отрицательных значений модельного коэффициента вблизи стенки накладывается ограничение $C_S \geqslant 0$.

Расчеты, выполненные с использованием векторной динамической модели и схем различного порядка точности (2-го, 4-го, 8-го и 12-го), практически совпадают [250].

3.2.5.6. Масштабно-зависимая динамическая модель. Динамическая модель Германо [161] и многие ее модификации используют предположение о том, что значение коэффициента Смагоринского при вторичной фильтрации $\widehat{\Delta} = \alpha\Delta$ не изменяется

$$\beta = \frac{C_{S,\alpha\Delta}^2}{C_{S,\Delta}^2} = 1.$$

Влияние разрешимых масштабов на значение параметра $C_{S,\Delta}$ не учитывается, в связи с чем динамическая модель Германо является масштабно-инвариантной (scale-invariant model).

В ряде работ влияние разрешимых масштабов на значение параметра Смагоринского учитывается при помощи задания фиксированного значения коэффициента β. Такой подход дает более точные результаты, чем исходная версия динамической модели [240].

Другой подход состоит в том, чтобы построить вычислительную процедуру для оценки параметра β (scale-dependent model). В работе [272] предполагается степенное изменение параметра Смагоринского $C_{S,\Delta} \sim \Delta^n$, что дает

$$C_{S,\Delta} = C_{S,\alpha\Delta}\left(\frac{\Delta}{\alpha\Delta}\right)^n, \quad \beta = \alpha^{2n}.$$

Параметр β оценивается как отношение коэффициентов Смагоринского, соответствующих масштабам $\alpha\Delta$ и Δ, что эквивалентное значению β, лежащему в интервале между $\alpha^2\Delta$ и $\alpha\Delta$.

Вместо тождества Германо, описываемого соотношением (3.9), получим

$$C^2_{S,\Delta} = \frac{\langle Q_{ij}N_{ij}\rangle}{\langle N_{ij}N_{ij}\rangle},$$

где

$$Q_{ij} = \widehat{\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j} - \widehat{\widetilde{v}}_i\widehat{\widetilde{v}}_j; \quad N_{ij} = 2\Delta^2\left(\widehat{|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}} - \alpha^4\beta^2|\widehat{\widetilde{s}}|\widehat{\widetilde{s}}_{ij}\right).$$

В качестве базовой модели в работе [272] используется лагранжевая динамическая модель с осреднением вдоль траектории жидкой частицы.

В работе [272] показывается, что расчет коэффициента β сводится к нахождению корня полинома 5-й степени. Значение корня используется в тождестве Германо (3.9). Подход показывает хорошие показатели производительности при осреднении по однородным направлениям.

Однако необходимость нахождения корня полинома высокого порядка в каждой точке расчетной области приводит к существенным вычислительным затратам. Для упрощения вычислительной процедуры в [81] считается, что стандартная динамическая модель дает значение параметра Смагоринского, соответствующее масштабам $\alpha\Delta$, а не сеточному фильтру Δ. Значение $\beta = 1$ дает $C_{S,\alpha\Delta}$, а не $C_{S,\Delta}$, что подтверждается численными расчетами как при увеличении коэффициента модели при увеличении разрешимых масштабов [240] (Δ приближается к колмогоровскому масштабу длины), так и при уменьшении модельного коэффициента при увеличении разрешимых масштабов скорости [272] (Δ приближается к интегральному масштабу длины). Кроме того, в тождестве Германо слагаемые, относящиеся к масштабу $\alpha\Delta$, оказываются значительно больше членов, связанных с масштабом Δ (примерно в 4 раза при $\alpha = 2$).

При $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$ получим

$$C^2_{S,2\Delta} = \frac{L_{LM}}{L_{MM}}, \quad C^2_{S,4\Delta} = \frac{L_{QN}}{L_{NN}}.$$

При этом L_{QN} и L_{NN} определяются по формулам, имеющим такой же вид, как для L_{LM} и L_{MM} (в этих формулах Q_{ij} и N_{ij} рассчитываются при $\beta = 1$).

Интегралы L_{QN} и L_{NN} удовлетворяют дифференциальным уравнениям, схожих с теми, что используются в лагранжевой динамической модели. Разностная схема строится по тому же принципу, но с использованием значений

$$T^n_{4\Delta} = \frac{3}{2}\Delta\left(\frac{L^n_{QN}}{L^n_{NN}}\right)^{-1/8}, \quad \varepsilon_{4\Delta} = \frac{\Delta t/T^n_{4\Delta}}{1+\Delta t/T^n_{4\Delta}}.$$

Соотношение для расчета коэффициента β имеет вид

$$\beta = \frac{C^2_{S,4\Delta}}{C^2_{S,2\Delta}}.$$

Предполагая, как и в [272], масштабную инвариантность, получим

$$\beta = \frac{C^2_{S,4\Delta}}{C^2_{S,2\Delta}} = \frac{C^2_{S,2\Delta}}{C^2_{S,\Delta}},$$

что дает

$$C^2_{S,\Delta} = \frac{C^2_{S,2\Delta}}{\beta}.$$

В принципе, коэффициент β изменяется от нуля до бесконечности в зависимости от значений $C^2_{S,4\Delta}$ и $C^2_{S,2\Delta}$. В работе [81] показано, что случай $\beta \to \infty$ не вызывает принципиальных затруднений с вычислительной точки зрения. Вместе с тем, при $\beta \to 0$ получаются достаточно большие значения $C_{S,\Delta}$, приводящие к численной неустойчивости. Поэтому на коэффициент накладывается ограничение $\beta \geqslant 0{,}125$. В то же время, из поведения модельного коэффициента вблизи стенки следует, что $\Delta C_{S,\Delta} \sim y$, поэтому

$$\beta = \frac{C^2_{S,2\Delta}}{C^2_{S,\Delta}} \sim \frac{y^2/(2\Delta)^2}{y^2/\Delta^2} = \frac{1}{4}.$$

Вдали от стенки значение β возрастает до 1. В результате ограничения, наложенного на β, его значение оказывается ниже допустимого.

Формула для параметра Смагоринского принимает вид

$$C^2_{S,\Delta} = \frac{C^2_{S,2\Delta}}{\max\{\beta; 0{,}125\}}, \quad C^2_{S,2\Delta} = \frac{L_{LM}}{L_{MM}}, \quad \beta = \frac{L_{QN}L_{MM}}{L_{NN}L_{LM}}.$$

Вычислительная стоимость модели оказывается на 20% выше по сравнению с моделью Смагоринского. Для сокращения вычислительных расходов имеется возможность обновления модельного коэффициента не на каждом шаге по времени, а через заданное количество шагов, которое зависит от числа Куранта.

Более общий подход к построению динамической модели, свободной от дополнительных параметров (Parameter-Free Dynamics model) и не предполагающей степенное изменение отношения ширины сеточного фильтра к ширине тестового фильтра, рассматривается в работе [312].

3.2.6. Дифференциальные модели. Дифференциальные модели подсеточной вязкости классифицируются по числу дополнительных уравнений, решаемых в дополнение к фильтрованной по пространству системе уравнений Навье–Стокса.

Наибольшее распространение получили модели с одним уравнением, записанным для подсеточной кинетической энергии

$$k_{\text{sgs}} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{v_k^2} - \widetilde{v}_k^2\right),$$

которая связывается с подсеточной вихревой вязкостью при помощи соотношения [99]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_\nu k_{\text{sgs}}^{1/2}\Delta,$$

где C_ν — эмпирический коэффициент ($C_\nu = 0{,}067$).

Уравнение для подсеточной кинетической энергии получается при помощи вычитания уравнения для мгновенной кинетической энергии из уравнения для разрешимой кинетической энергии [346]. Члены, описывающие подсеточный перенос, моделируются в следующем виде:

— диффузионный перенос и расширение трубок тока

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{k_{\text{sgs}} v_i} - \widetilde{k}_{\text{sgs}}\widetilde{v}_i\right) + \left(\overline{v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}} - \widetilde{v}_i\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right) + \\ + \left(\widetilde{v_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}} - \widetilde{v}_i\frac{\partial \widetilde{\tau}_{ij}}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\nu + \nu_{\text{sgs}}\right)\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_i}\right];$$

— производство

$$P = -\tau_{ij}\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} = 2\nu_{\text{sgs}}|\widetilde{s}|^2;$$

— диссипация

$$D = C_\varepsilon\frac{k_{\text{sgs}}^{3/2}}{\Delta}.$$

Модельному параметру присваивается значение $C_\varepsilon = 0{,}916$.

Уравнение для подсеточной кинетической энергии записывается в виде, формально совпадающем с уравнением для кинетической энергии турбулентности в k–ε модели турбулентности (отличие заключается в форме записи диссипативного члена)

$$\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{v}_i k_{\text{sgs}}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\nu + \nu_{\text{sgs}}\right)\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_i}\right] + P - D.$$

Компоненты тензора подсеточных напряжений находятся из соотношения, описывающего гипотезу Буссинеска

$$\tau_{ij} = -2\nu_{\text{sgs}}\left(\widetilde{s}_{ij} - \frac{1}{3}\widetilde{s}_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{2}{3}k_{\text{sgs}}\delta_{ij}.$$

В подходе [331] предполагается положительность диагональных компонент тензора подсеточных напряжений и накладываются дополнительные ограничения на другие компоненты (relizability conditions)

$$\tau_{11} \geqslant 0, \quad \tau_{22} \geqslant 0, \quad \tau_{33} \geqslant 0,$$
$$|\tau_{12}|^2 \leqslant \tau_{11}\tau_{22}, \quad |\tau_{23}|^2 \leqslant \tau_{22}\tau_{33}, \quad |\tau_{13}|^2 \leqslant \tau_{11}\tau_{33},$$
$$\det \tau_{ij} \leqslant 0.$$

Более широкое условие предполагает, что $C_\nu \geqslant 0$.

В модели [99, 346] используются постоянные значения модельных коэффициентов, которые определяются путем согласования расчетных и экспериментальных данных. В локализованной версии дифференциальной модели с динамической процедурой [199] (Localized Dynamic k-equation Model) для нахождения коэффициентов C_ν и C_ε применяется процедура их адаптации к локальной структуре турбулентного потока.

Компоненты тензоров подсеточных напряжений, соответствующих сеточному и пробному фильтру, представляются в виде

$$\tau_{ij} = -C_\nu \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2} \widetilde{s}_{ij};$$
$$T_{ij} = -C_\nu \widehat{\Delta} K_{\text{sgs}}^{1/2\widehat{\ }} \widehat{\widetilde{s}}_{ij}.$$

Модельный коэффициент находится из соотношения, записанного в виде тождества Германо

$$(C_\nu \Delta)^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}},$$

где

$$L_{ij} = \widehat{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widehat{\widetilde{v}}_i \widehat{\widetilde{v}}_j;$$
$$M_{ij} = \widehat{\Delta} K_{\text{sgs}}^{1/2\widehat{\ }} \widehat{\widetilde{s}}_{ij} - \Delta \widehat{k_{\text{sgs}}^{1/2} \widetilde{s}_{ij}}.$$

Под k_{sgs} и K_{sgs} понимается подсеточная кинетическая энергия, соответствующая сеточному и тестовому фильтру

$$k_{\text{sgs}} = \frac{1}{2} (\widetilde{v_i v_i} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_i);$$
$$K_{\text{sgs}} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\widetilde{v_i v_i}} - \widehat{\widetilde{v}}_i \widehat{\widetilde{v}}_i \right).$$

Связь между ними дается формулой

$$K_{\text{sgs}} = \widehat{k}_{\text{sgs}} + \frac{1}{2} L_{ii} = \frac{1}{2} T_{ii}.$$

Другой способ определения K_{sgs} состоит в решении дополнительного уравнения переноса.

На практике находят применение различные способы обеспечения устойчивости вычислительной процедуры.

В модели Смагоринского предполагается локальное равновесие порождения и диссипации $P = D$. В модели [132] считается, что

$$\widehat{P}_k - \frac{1}{\Delta} C_\nu k_{\text{sgs}}^{3/2} = P_K - \frac{1}{\widehat{\Delta}} C_\nu K_{\text{sgs}}^{3/2}.$$

Соотношение для расчета модельного коэффициента на слое $n+1$ по времени имеет вид

$$C_\nu^{n+1} = \left(P_K - \widehat{P}_k + \frac{1}{\Delta} C_\nu^n k_{\text{sgs}}^{3/2} \right) \frac{\widehat{\Delta}}{K_{\text{sgs}}^{3/2}}.$$

Положительность диссипации требует ограничения $C_\nu \geqslant 0$.

В уравнении переноса используется постоянная величина модельного коэффициента в пространстве $\langle C_k \rangle_V$, которая определяется из условия, чтобы производство подсеточной кинетической энергии во всей вычислительной области оставалось таким же [132]

$$\left\langle 2 C_\nu \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2} \widetilde{s}_{ij} \widetilde{s}_{ij} \right\rangle_V = 2 \langle C_\nu \rangle_V \left\langle \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2} \widetilde{s}_{ij} \widetilde{s}_{ij} \right\rangle.$$

Вся локальная информация включается в источниковый член уравнения переноса для того, чтобы обеспечить устойчивость численной процедуры и сглаживание флуктуаций модельного коэффициента.

При известной вязкости подсеточная кинетическая энергия находится из соотношения [316]

$$k_{\text{sgs}} = \frac{C_e \nu_{\text{sgs}} \left(\nu + \nu_{\text{sgs}} \right)}{\left(C_S \Delta \right)^2},$$

в котором $C_e \sim 3{,}5$, а подсеточная вязкость ν_{sgs} рассчитывается по формуле Смагоринского (3.2).

Дифференциальные модели позволяют учесть предысторию потока и нелокальные эффекты, а также обратный переход энергии от подсеточных к разрешимым масштабам. Иногда для преодоления вычислительной неустойчивости уравнение для кинетической энергии используется для отключения вихревой вязкости, когда кинетическая энергия падает до нуля.

Во многих случаях привлечение дополнительного уравнения не приводит к более точным результатам по сравнению с алгебраическими моделями подсеточной вихревой вязкости [268], в связи с чем широкого распространения на практике такие модели не получили.

3.2.7. Другие модели. Линейные модели вихревой вязкости, например, модель Смагоринского, не учитывают ряд эффектов, имеющих место в реальных турбулентных потоках. В частности, они не учитывают перенос энергии по спектру в инерционном интервале, включая обратное рассеяние энергии, а также ее перераспределение между нор-

мальными компонентами тензора напряжений. Перечисленные эффекты являются следствием нелинейных взаимодействий и анизотропии.

Для моделирования пристеночных течений (например, течения в канале) обнадеживающие результаты показывает модель Смагоринского с фильтрацией масштабов, соответствующих высоким частотам (High-Pass Filtered). При известном фильтре $G(\omega)$ (low-pass filter) высокочастотный фильтр (high-pass filter) конструируется следующим образом

$$H_N(\omega) = [I - G(\omega)]^{N+1},$$

где N — порядок фильтра. В то время как в волновом пространстве фильтр $\widehat{G}$ представляет собой убывающую функцию частоты ω, фильтры $\widehat{H}_N$ являются возрастающими функциями своего аргумента.

Фильтр H применяется к полю скорости, фильтрованному при помощи сеточного фильтра, которое и используется при расчете компонент тензора подсеточных напряжений

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = 2\nu_{\text{sgs}} s_{ij}\,(H * \widetilde{\mathbf{v}}),$$

где

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_{S\omega_c}\Delta)^2\,|s_{ij}(H * \widetilde{\mathbf{v}})|.$$

Модельному параметру присваивается значение $C_{S\omega_c} = 0{,}08$. Под ω_c понимается частота отсечки ($\omega_c = 2\pi/3$).

Для подсеточной диссипации имеет место соотношение

$$\varepsilon_{\text{sgs}} = \tau_{ij}\widetilde{s}_{ij} = 2\nu_{\text{sgs}}\widetilde{s}_{ij}(H * \widetilde{\mathbf{v}})\widetilde{s}_{ij}.$$

В отличие от модели Смагоринского, модель HPF не является чисто диссипативной.

Модель HPF учитывает только взаимодействие между наименьшими разрешимыми масштабами и крупными неразрешимыми (подсеточными) масштабами турбулентного движения [305, 330] (другими взаимодействиями пренебрегается). Следуя терминологии [184], модель HPF называется small–«small» (подсеточная вязкость рассчитывается на основе малых масштабов, моделирование также относится к малым масштабам). Модели, в которых подсеточная вязкость рассчитывается на основе всех масштабов, а моделирование проводится только для малых масштабов, называется all–«small». Выражения для компонент тензора подсеточных напряжений и подсеточной вязкости для различных моделей приводятся в табл. 3.1.

При этом удается добиться довольно точных результатов в пристеночной области канала без использования демпфирующих функций или динамической процедуры [305]. Для моделирования течения в пограничном слое применяется динамическая оценка коэффициента $C_{S\omega_c}$ [179].

Модель HPF имеет схожие черты со спектральными многомасштабными моделями.

Таблица 3.1. Выражения для компонент тензора подсеточных напряжений и подсеточной вязкости

Модель	$\tau_{ij} - \tau_{kk}\delta_{ij}/3$	ν_{sgs}
Small–«small»	$2\nu_{\text{sgs}}s_{ij}(H * \widetilde{\mathbf{v}})$	$C\Delta^2\lvert s(H * \widetilde{\mathbf{v}})\rvert$
All–«small»	$2\nu_{\text{sgs}}s_{ij}(H * \widetilde{\mathbf{v}})$	$C\Delta^2\lvert s(\widetilde{\mathbf{v}})\rvert$
Small–all	$2\nu_{\text{sgs}}s_{ij}(\widetilde{\mathbf{v}})$	$C\Delta^2\lvert s(H * \widetilde{\mathbf{v}})\rvert$

Разрабатываются нелинейные модели вихревой вязкости, учитывающие анизотропию потока [45, 95], а также дифференциальные модели с двумя уравнениями, записанными для подсеточной кинетической энергии и скорости ее диссипации.

3.3. Модели подобных масштабов

Существенной стороной моделей вихревой вязкости является их способность диссипировать кинетическую энергию каскадным образом. При этом модели вихревой вязкости предполагают отсутствие передачи энергии от малых вихрей к разрешимым масштабам.

Модели подобных масштабов (Scale Similarity Model, SSM) не используют концепцию вихревой вязкости и не требуют предположения о локальном равновесии порождения и диссипации кинетической энергии, которое используется в модели Смагоринского, а также учитывают возможность обратной передачи энергии от подсеточных к разрешимым масштабам [63, 182, 291]. Недостаток моделей этого типа состоит в том, что они не обладают свойством сеточной диссипации. Недостаточная диссипативность подсеточной модели приводит к проблемам с устойчивостью вычислительной процедуры.

В моделях подобных масштабов используется предположение о том, что крупные подсеточные вихри ($l \leqslant \Delta$) и малые разрешимые масштабы ($l > \Delta$) обладают свойством подобия (наименьшие разрешимые масштабы не отличаются от крупных неразрешимых масштабов вблизи волнового числа отсечки).

Неразрешимые (unresolved scales) и разрешимые (resolved scales) масштабы скорости определяются следующими соотношениями:

— неразрешимые масштабы ($l \leqslant \Delta$)

$$v_i' = v_i - \widetilde{v}_i;$$

— разрешимые масштабы ($l > \Delta$)

$$\widetilde{v}_i' = \widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i.$$

Соотношение между различными масштабами и их сопоставление с масштабами, рассчитываемыми при помощи прямого численного моделирования, поясняет рис. 3.4.

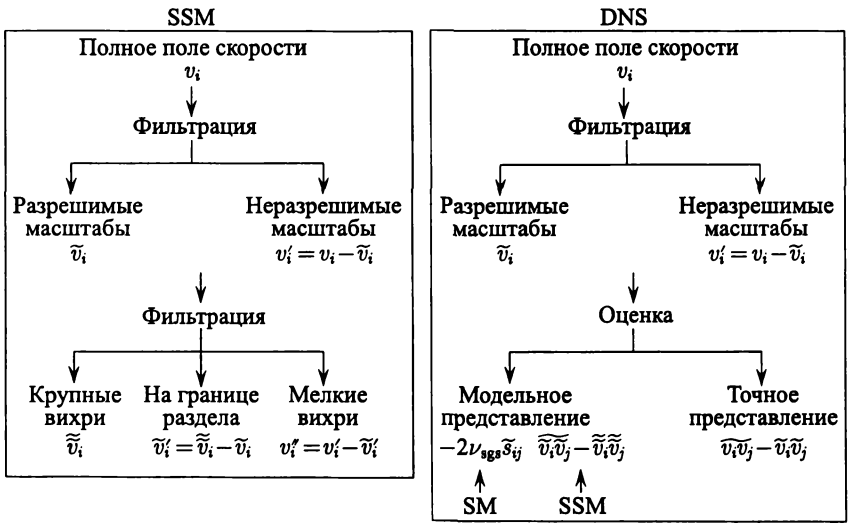


Рис. 3.4. Разрешимые и неразрешимые масштабы в модели подобных масштабов

В качестве основного предположения считается, что подсеточные напряжения, соответствующие полному полю скорости, имеют такой же вид, как и для разрешимого поля скорости [63]

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j \simeq C_L \left(\widetilde{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i \widetilde{\widetilde{v}}_j \right), \tag{3.12}$$

где C_L — коэффициент подобия.

Компоненты тензоров рейнольдсовых и перекрестных напряжений представляются в виде [63]

$$R_{ij} = C_B \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i \right) \left(\widetilde{v}_j - \widetilde{\widetilde{v}}_j \right);$$
$$C_{ij} = \widetilde{\widetilde{v}}_i \left(\widetilde{v}_j - \widetilde{\widetilde{v}}_j \right) + \widetilde{\widetilde{v}}_j \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i \right).$$

Здесь $C_B = 2 \div 9$.

В модели [63] вторичная фильтрация поля скорости производится с полосой пропускания, соответствующей сеточному фильтру Δ. В более общем подходе рассматривается фильтрация с шириной фильтра $\widehat{\Delta} = \gamma\Delta$. Например, в модели [224] полагается, что $\gamma = 2$.

Нелинейные SSM-модели не требуют фильтрации на масштабах, превышающих Δ. Для нахождения компонент тензора подсеточных напряжений в соотношении (3.12) применяется разложение в ряд Тэйлора либо составляющих скорости $\widetilde{v}_i$ и $\widetilde{v}_j$ [216], либо их произведения $\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j$ [210] (оба подхода требуют конечности вторых моментов поля скорости). Как правило, в разложении в ряд Тэйлора ограничиваются членами 1-го порядка малости.

В модели [216] используется представление

$$\widetilde{\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j} = \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j + \frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_k} + O(\Delta^2).$$

В рамках этого подхода соотношение для расчета корреляционного момента скорости и температуры имеет вид

$$\widetilde{\widetilde{v}_i\widetilde{T}} = \widetilde{v}_i\widetilde{T} + \frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + O(\Delta^2).$$

В работе [197] в разложении в ряд Тэйлора учитываются слагаемые порядка $O(\Delta^6)$.

В модели [210] используется представление

$$\widetilde{\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j} = \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j + \frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial^2\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j}{\partial x_k^2} + O(\Delta^2).$$

В общем случае разложение в ряд Тэйлора имеет вид

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_iv_j} - \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^n\widetilde{v}_i}{\partial x^n}\frac{\partial^n\widetilde{v}_j}{\partial x^n} = \Delta^2\frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_k} + \\ + \frac{\Delta^4}{2!}\frac{\partial^2\widetilde{v}_i}{\partial x_k\,\partial x_l}\frac{\partial^2\widetilde{v}_j}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\Delta^6}{3!}\frac{\partial^3\widetilde{v}_i}{\partial x_k\partial x_l\partial x_m}\frac{\partial^3\widetilde{v}_j}{\partial x_k\partial x_l\partial x_m} + \ldots,$$

из которого следует, что

$$\tau_{ij} = C_L\Delta^2\frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\widetilde{v}_j}{\partial x_k}.$$

По сравнению с моделями вихревой вязкости, модели подобных масштабов учитывают в представлении подсеточных напряжений слагаемые более высокого порядка малости. Модели подобных масштабов лучше предсказывают обратный переход энергии, чем динамические модели [271], однако являются недостаточно диссипативными, что затрудняет их использование на практике.

3.4. Смешанные модели

Смешанные модели (Mixed Scale Model, MSM) объединяют возможности моделей вихревой вязкости и моделей подобных масштабов.

3.4.1. Основные типы. Смешанные модели относятся к одному из двух типов. В моделях первого типа тензор подсеточных напряжений расщепляется на два слагаемых

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(A + B),$$

компоненты которых рассчитываются на основе модели Смагоринского [297] и модели подобных масштабов [63]

$$A = -2\nu_{\text{sgs}}\widetilde{s}_{ij}, \quad B = \widetilde{\widetilde{v}_i}\widetilde{\widetilde{v}_j} - \widehat{\widetilde{v}_i}\widehat{\widetilde{v}_j}.$$

В моделях второго типа тензор подсеточных напряжений раскладывается на три составляющие

$$\tau_{ij} = R_{ij} + L_{ij} + C_{ij}.$$

Для представления компонент тензора подсеточных напряжений R_{ij} обычно используется модель Смагоринского, а компоненты тензора перекрестных напряжений C_{ij} выражаются через компоненты тензора леонардовых напряжений L_{ij}.

Подсеточная вязкость вычисляется как взвешенное среднее подсеточной вязкости для крупных вихрей $\nu^1_{\text{sgs}} = (C_{\text{S}}\Delta)^2\,|\widetilde{s}|$ и подсеточной вязкости для мелких вихрей $\nu^2_{\text{sgs}} = C_k\Delta k^{1/2}_{\text{sgs}}$. Формула для расчета подсеточной вязкости имеет вид [279]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_m(\alpha)\Delta^{1+\alpha}\,|\widetilde{s}|^{\alpha}\,k^{1-\alpha}_{\text{sgs}},$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Значение $\alpha = 1$ соответствует модели Смагоринского [297], а значение $\alpha = 0$ — модели подобных масштабов [63]. При $\alpha = 1/2$ коэффициенту модели присваивается значение $C_m = 0{,}06$.

Подсеточная кинетическая энергия находится в рамках гипотезы подобных масштабов [63]

$$k_{\text{sgs}} = \frac{1}{2}\widetilde{v}'^2_k, \quad \widetilde{v}'_k = \widetilde{v}'_k, \quad \widetilde{v}'_k = \widetilde{v}_k - \widehat{\widetilde{v}}_k,$$

где $\widetilde{v}_k$ и $\widehat{\widetilde{v}}_k$ — скорости, соответствующие сеточному и пробному фильтру. В случае гауссовского пробного фильтра

$$\widehat{\widetilde{v}}_k = \frac{1}{4}\widetilde{v}_{k-1} + \frac{1}{2}\widetilde{v}_k + \frac{1}{4}\widetilde{v}_{k+1}.$$

В модифицированном подходе [279] для расчета подсеточной вязкости используются компоненты тензора скоростей деформаций и тензора вращения

$$\nu_{\text{sgs}} = C_m(\alpha)\Delta^{1+\alpha}\,|\widetilde{\omega}|^{\alpha}\,|\widetilde{s}|^{1-\alpha} = \left(C_S^2\Delta^2\,|\widetilde{\omega}|\right)^{\alpha}\left(C_B\Delta\,|\widetilde{s}|\right)^{1-\alpha},$$

где $C_m(\alpha) = C_S^{2\alpha}C_B^{1-\alpha}$.

В смешанной модели с ограничением (Selective Mixed Scale, SMS) вводится функция-переключатель $\phi(\beta)$, зависящая от угла между локальной и средней завихренностью. Формула для расчета подсеточной вязкости принимает вид [63]

$$\nu_{\text{sgs}} = \phi(\beta)\underbrace{\left(C_\omega\Delta^2\,|\widetilde{s}|\right)^{\alpha}}_{\nu_\omega}\underbrace{\left(C_k\Delta k^{1/2}_{\text{sgs}}\right)^{1-\alpha}}_{\nu_k}.$$

После упрощения при $\alpha = 1/2$ имеем [280]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_m \phi(\beta) \, |\widetilde{s}|^{1/2} \, k_{\text{sgs}}^{1/4} \Delta^{3/2},$$

где $C_\omega = C_S^2 = 0{,}01$, $C_k = 0{,}126$, $C_m = C_\omega^{1/2} C_k^{1/2} = 0{,}04$.

Модель применяется в тех областях, где $\beta > 20°$, что соответствует максимуму функции плотности вероятности флуктуаций локальной завихренности потока в случае однородной и изотропной турбулентности. Функция-переключатель имеет вид

$$\phi(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta \geqslant \beta_0, \\ 0, & \text{если } \beta < \beta_0, \end{cases}$$

где $\beta = (20 \div 40)°$. Данный переключатель имеет разрыв, поэтому используется непрерывная функция

$$\phi(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta \geqslant \beta_0, \\ r(\beta)^n, & \text{если } \beta < \beta_0, \end{cases}$$

где

$$r(\beta) = \frac{\operatorname{tg}^2(\beta/2)}{\operatorname{tg}^2(\beta_0/2)}.$$

Постоянные выбираются по данным прямого численного моделирования ($n = 2$, $\beta_0 = 20°$).

Для учета анизотропности вводится тензор [280]

$$\Gamma_{ij} = \frac{3\left(\widetilde{u}_i - \widehat{\widetilde{u}}_i\right)\left(\widetilde{u}_j - \widehat{\widetilde{u}}_j\right)}{\sum\limits_{l=1}^{3}\left(\widetilde{u}_l - \widehat{\widetilde{u}}_l\right)^2}.$$

Подсеточная вязкость рассчитывается по формуле

$$\nu_{\text{sgs}} = C_m \phi(\beta) \, |\widetilde{s}|^{1/2} \, k_{ij}^{1/4} \Delta^{3/2}, \quad k_{ij} = k_{\text{sgs}} \Gamma_{ij} \tag{3.13}$$

или

$$\nu_{\text{sgs}} = C_m \phi(\beta) \, |\widetilde{s}|^{1/2} \, k_{\text{sgs}}^{1/4} \Delta^{3/2} \Gamma_{ij}. \tag{3.14}$$

В модели (3.13) поправка на анизотропность имеет порядок $\Gamma_{ij}^{1/4}$, а в модели (3.14) — порядок Γ_{ij}. Поскольку $0 \leqslant |\Gamma_{ij}| \leqslant 1$ для $\forall i, j$, то в модели (3.14) поправка на анизотропность оказывается более важной.

При построении подсеточных моделей обычно используются масштабы скорости и длины, так что $\nu_{\text{sgs}} \sim VL$. Другой путь состоит в использовании масштабов скорости и времени, тогда $\nu_{\text{sgs}} \sim V^2 T$. Формула для расчета подсеточной вязкости принимает вид [348]

$$\nu_{\text{sgs}} = C_M k_{\text{sgs}} T,$$

где $C_M = 0{,}05$. Временной масштаб определяется как $T = \Delta / k_{\text{sgs}}^{1/2}$.

В смешанной модели [187] (Mixed-Time Scale Model, MTSM) в качестве масштаба времени принимается среднее из значений, соответствующих мелким и крупным вихрям

$$T^{-1} = \left(\frac{\Delta}{k_{\text{sgs}}^{1/2}}\right) + \left(\frac{C_T}{|\widetilde{s}|}\right)^{-1},$$

где $C_T = 10$. В пристеночной области $T \sim 1/|\widetilde{s}|$, что не требует введения демпфирующей функции. Вдали от стенки, если $|\widetilde{s}| \to 0$, то $\nu_{\text{sgs}} = C_M k_{\text{sgs}}^{1/2} \Delta$.

Формула для подсеточной вязкости имеет вид

$$\nu_{\text{sgs}} = \frac{C_M}{1 + (RC_T)^{-1}} \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2},$$

где $R = k_{\text{sgs}}^{1/2}/(\Delta|\widetilde{s}|)$. В расчетах [348] предполагается, что параметр R остается постоянным в условиях локального равновесия.

На примере расчетов течения в плоскопараллельном канале, течения за обратной ступенькой и обтекания кругового цилиндра показываются преимущества модели MTSM (в смысле точности и устойчивости) перед динамической моделью [187].

3.4.2. Динамические модификации. В динамических модификациях смешанной модели для расчета модельных коэффициентов используется динамическая процедура. Динамическая процедура применяется к параметру Смагоринского C_S, параметру модели подобных масштабов C_L, либо к ним обоим.

В динамической смешанной модели (Dynamic Mixed Model, DMM) компоненты тензоров подсеточных напряжений, соответствующих сеточному и пробному фильтру, представляются в виде [331, 351]

$$\tau_{ij} = -2(C_S\Delta)^2\,|\,\widetilde{s}\,|\,\widetilde{s}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{1}{3} L_{kk}^m \delta_{ij};$$

$$T_{ij} = -2(C_S\widehat{\Delta})^2|\,\widehat{\widetilde{s}}\,|\widehat{\widetilde{s}}_{ij} + L_{ij}^M - \frac{1}{3} L_{kk}^M \delta_{ij}.$$

Здесь

$$L_{ij}^m = \widetilde{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i \widetilde{\widetilde{v}}_j;$$

$$L_{ij}^M = \widehat{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widehat{\widetilde{v}}_i \widehat{\widetilde{v}}_j.$$

В модели [331] при вторичной фильтрации поля скорости используется пробный фильтр с полосой пропускания $\widehat{\Delta} = 2\Delta$, а в модели [351] — явный дискретный фильтр.

Нахождение параметра Смагоринского сводится к минимизации квадратичной формы

$$Q = \left(L_{ij} - H_{ij} - \frac{1}{3} I_{kk}\delta_{ij} - 2C_S^2 M_{ij} \right)^2,$$

где

$$H_{ij} = \widehat{\widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j} - \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_i \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_j;$$
$$M_{ij} = -\widehat{\Delta}^2 \left| \widehat{\widetilde{\overline{s}}} \right| \widehat{\widetilde{\overline{s}}}_{ij} + -\Delta^2 \widehat{|\widetilde{\overline{s}}| \widetilde{\overline{s}}_{ij}};$$
$$I_{kk} = L_{kk} + \widehat{L}_{kk}^m - L_{kk}^M.$$

Метод наименьших квадратов приводит к следующему выражению для параметра Смагоринского, аналогичному тождеству Германо

$$C_S^2 = \frac{(L_{ij} - H_{ij})M_{ij}}{M_{kl}M_{kl}}.$$

В смешанной модели с динамической оценкой двух параметров (Dynamic Two-Parameter Mixed Model, DTPMM) модельные параметры C_S и C_L оцениваются либо одновременно [283], либо последовательно [250].

В нелинейной смешанной модели компоненты тензора подсеточных напряжений для пробного фильтра имеют вид

$$T_{ij} = -2C_S^2(2\Delta)^2 \widehat{|\widetilde{\overline{s}}|\widetilde{\overline{s}}}_{ij} + C_L \left(\widehat{\widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j} - \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_i \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_j \right).$$

Тильда соответствует фильтру с полосой пропускания Δ, крышка — фильтру с полосой пропускания 2Δ, черта — фильтру с полосой пропускания 4Δ. После необходимых преобразований получим

$$T_{ij} = -2C_S^2(2\Delta)^2 \widehat{|\widetilde{\overline{s}}|\widetilde{\overline{s}}}_{ij} + C_L(2\Delta)^2 \widehat{\widetilde{\overline{A}}}_{ik} \widehat{\widetilde{\overline{A}}}_{jk},$$

где $A_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$. Подстановка приводит к соотношению

$$L_{ij} = C_S^2 M_{ij} + C_L N_{ij}, \quad M_{ij} = -2\Delta^2 \left(4\widehat{|\widetilde{\overline{s}}|\widetilde{\overline{s}}}_{ij} - \widehat{|\widetilde{\overline{s}}|\widetilde{\overline{s}}_{ij}} \right).$$

Представление компонент тензора N_{ij} зависит от конкретной модели. Используется зависимость либо от составляющих скорости

$$N_{ij} = \left(\widehat{\widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j} - \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_i \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_j \right) - \left(\widehat{\widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j} - \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_i \widehat{\widetilde{\overline{v}}}_j \right),$$

либо от их производных

$$N_{ij} = \Delta^2 \left(4\widehat{\widetilde{\overline{A}}}_{ik} \widehat{\widetilde{\overline{A}}}_{jk} - \widehat{\widetilde{\overline{A}}_{ik} \widetilde{\overline{A}}_{jk}} \right).$$

Оценки модельных коэффициентов получаются в результате минимизации следующей квадратичной формы

$$Q = \langle L_{ij}L_{ij}\rangle + (C_S^2)^2\langle M_{ij}M_{ij}\rangle + C_L^2\langle N_{ij}N_{ij}\rangle - \\ - 2\left(C_S^2\langle L_{ij}M_{ij}\rangle + C_L\langle L_{ij}N_{ij}\rangle - C_S^2C_L\langle N_{ij}M_{ij}\rangle\right).$$

Метод наименьших квадратов дает следующие соотношения для параметра Смагоринского и параметра модели подобных масштабов

$$C_S^2 = \frac{\langle L_{ij}M_{ij}\rangle\langle N_{ij}N_{ij}\rangle - \langle L_{ij}N_{ij}\rangle\langle M_{ij}N_{ij}\rangle}{\langle M_{ij}M_{ij}\rangle\langle N_{ij}N_{ij}\rangle - \langle M_{ij}N_{ij}\rangle\langle M_{ij}N_{ij}\rangle};$$

$$C_L = \frac{\langle L_{ij}N_{ij}\rangle\langle M_{ij}M_{ij}\rangle - \langle L_{ij}M_{ij}\rangle\langle M_{ij}N_{ij}\rangle}{\langle M_{ij}M_{ij}\rangle\langle N_{ij}N_{ij}\rangle - \langle M_{ij}N_{ij}\rangle\langle M_{ij}N_{ij}\rangle}.$$

Вопрос о стабилизации численных расчетов при помощи осреднения модельных коэффициентов решается также, как и в динамической модели Германо или ее модификациях (осреднение по однородным направлениям или вдоль траектории жидкой частицы). Наиболее предпочтительным является осреднение вдоль траектории жидкой частицы [56] (Lagrangian Dynamic Mixed Model Similarity, LDMMS).

Весовая функция в этой модели имеет вид

$$W(t,\tau) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right).$$

Положение частицы в момент времени $\tau \leqslant t$ находится из соотношения

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - \int_\tau^t \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{z}(t'),t')\,dt'.$$

Оценка модельных параметров получается в результате минимизации функционала

$$E(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{t} E_{ij}^2(\mathbf{z}(\tau),\tau)W(t,\tau)\,d\tau,$$

где

$$E_{ij}^2(\mathbf{z}(\tau),\tau) = \Big[L_{ij}(\mathbf{z}(\tau),\tau) - C_S^2(\mathbf{x}(t),t)M_{ij}(\mathbf{z}(\tau),\tau) + \\ + C_L(\mathbf{x}(t),t)N_{ij}\mathbf{z}(\tau),\tau\Big]^2.$$

Методы вариационного исчисления приводят к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L_{LM}}{\partial t} + (\widetilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\,L_{LM} = \frac{1}{T}\,(L : M - L_{LM}),$$

где

$$L_{LM} = \langle L_{ij} M_{ij} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{t} L_{ij} M_{ij}(\mathbf{z}(\tau), \tau) W(t, \tau)\, d\tau.$$

Уравнения для L_{LM}, L_{MM}, L_{NN}, L_{MN} имеют такой же вид. Из условия положительности параметра Смагоринского следует, что

$$L_{LM} L_{NN} - L_{LN} L_{MN} \geqslant 0.$$

В начальный момент времени полагается, что

$$L_{LM}(\mathbf{x}, 0) = L : M(\mathbf{x}, 0);$$
$$L_{MM}(\mathbf{x}, 0) = M : M(\mathbf{x}, 0);$$
$$L_{NN}(\mathbf{x}, 0) = N : N(\mathbf{x}, 0);$$
$$L_{NM}(\mathbf{x}, 0) = N : M(\mathbf{x}, 0).$$

Учитывая, что $C_S^2(0) = 0{,}02$ и $C_L(0) = 0$, полагается

$$L_{LM}(\mathbf{x}, 0) = C_S^2(0) M : M(\mathbf{x}, 0) + C_L(0) N : M(\mathbf{x}, 0);$$
$$L_{LN}(\mathbf{x}, 0) = C_S^2(0) N : M(\mathbf{x}, 0) + C_L(0) N : N(\mathbf{x}, 0).$$

При расчетах пристеночных течений в направлении, параллельном стенке, используются периодические граничные условия, а в направлении, нормальном стенке — условия Неймана (равенство нулю производной по нормали к стенке).

Как и в лагранжевой динамической модели вихревой вязкости [241], для расчета временной постоянной используется соотношение

$$T = \frac{3}{2} \Delta \left[\left(L_{LM} - \frac{L_{LM} L_{NM}}{L_{NN}} \right) L_{MM} \right]^{-1/8}.$$

При $C_S^2 \to 0$ время релаксации увеличивается. Коэффициент 3/2 выбирается исходя из данных прямого численного моделирования.

Высокая точность дискретизации дифференциальных уравнений при нахождении модельных коэффициентов не требуется, поэтому используются разностные схемы 1-го порядка точности по времени и по пространству

$$L_{LM}^{n+1}(\mathbf{x}) - L_{LM}^{n}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}^n \Delta t) = \frac{\Delta t}{T^n} \left\{ [L_{ij} M_{ij}]^{n+1}(\mathbf{x}) - L_{LM}^{n+1}(\mathbf{x}) \right\}.$$

Перепишем полученное выражение в виде взвешенной суммы значения, полученного на шаге n в точке $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}^n \Delta t$, и значения, вычисленного на шаге $n+1$ в точке $\mathbf{x}$. Тогда получим

$$L_{LM}^{n+1}(\mathbf{x}) = \chi [L_{ij} M_{ij}]^{n+1}(\mathbf{x}) + (1 - \chi) L_{LM}^{n}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}^n \Delta t), \qquad (3.15)$$

где

$$\chi = \frac{\Delta t/T^n}{1+\Delta t/T^n};$$

$$T^n = \frac{3}{2}\Delta\left[\left(L^n_{LM} - \frac{L^n_{LM}L^n_{NM}}{L^n_{NN}}\right)L^n_{MM}\right]^{-1/8}.$$

Параметры в точке $\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{v}}^n\Delta t$ вычисляются при помощи билинейной интерполяции.

В результате, соотношения для параметров смешанной модели приобретают вид

$$C_S^2 = \frac{L_{LM}L_{NN} - L_{LN}L_{NM}}{L_{MM}L_{NN} - L_{NM}L_{NM}};$$

$$C_L = \frac{L_{LN}L_{MM} - L_{LM}L_{NM}}{L_{MM}L_{NN} - L_{NM}L_{NM}}.$$

Для того чтобы избежать комплексных значений модельных коэффициентов, полагается

$$L^{n+1}_{LM} = \max\{\text{формула (3.15)}, L^n_{LN}L^n_{NM}/L^n_{NN}\}.$$

Для лагранжевой динамической модели $C_S^2 = L_{LM}/L_{MM}$ и $C_L = 0$.

В случае вторичной фильтрации $\widehat{\Delta} = \gamma\Delta$, причем $\gamma = 1$ — в модели [331, 351] (модели типа DMM), $\gamma = 1$ — в модели [283, 331], $\gamma = 2$ — в модели [223], $\gamma = 4/3$ — в модели [51] (модели типа DTMM).

3.4.3. Нелинейные модели. Одна из нелинейных моделей смешанного типа (Mixed Non-linear Model) предложена в работе [116].

Компоненты тензора подсеточных напряжений представляются в виде суммы линейной и нелинейной составляющих

$$\tau_{ij} = \tau^l_{ij} + \widetilde{\tau}^n_{ij}.$$

Для вычисления компонент тензора τ^l_{ij} используется модель Самгоринского, а для расчета нелинейного фильтрованного члена $\widetilde{\tau}^n_{ij}$ находят применение различные подходы.

Мгновенная скорость представляется в виде разложения на фильтрованную и пульсационную составляющие $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$, в котором фильтрованная и пульсационная составляющие скорости связаны при помощи соотношения

$$\mathbf{v}' = -\alpha^2\nabla^2\widetilde{\mathbf{v}}.$$

Мгновенная скорость находится по формуле

$$\mathbf{v} = \left(1 - \alpha^2\nabla^2\right)\widetilde{\mathbf{v}}.$$

Формула обращения имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{1-\alpha^2\nabla^2}\mathbf{v}(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'.$$

Параметр α связывается с размером шага разностной сетки.

При построении подсеточной модели используются различные формы записи уравнений Навье–Стокса. Для построения разложения конвективного потока применяются мгновенная скорость $\mathbf{v}$, пульсационная составляющая скорости $\mathbf{v}'$ или вихрь скорости $\boldsymbol{\omega}$. Построенные слагаемые добавляются к крупномасштабному представлению конвективного слагаемого $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ или $\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}$ в зависимости от формы записи уравнений Навье–Стокса. Дополнительные слагаемые имеют вид $-\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}'$ в модели [140] (в этой формулировке сохраняется циркуляция, что является эквивалентным лагранжевому осреднению уравнений Навье–Стокса), $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}'$ в модели [162] или $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}'+(\mathbf{v}'\cdot\nabla)\mathbf{v}$ в модели [116]. После некоторых преобразований эти слагаемые могут быть представлены в следующем виде (в записи нелинейной части тензора подсеточных напряжений необходимо использовать их фильтрованные аналоги).

выражение для τ_{ij}^n	модель
$C_c\rho\alpha^2 v_{i,k}v_{j,k}$	[116]
$C_k\rho\alpha^2\left(v_{i,k}v_{k,j}+3v_{i,k}v_{j,k}-v_{k,i}v_{k,j}\right)$	[206]
$C_\alpha\rho\alpha^2\left(v_{i,k}v_{k,j}+v_{i,k}v_{j,k}v_{k,i}v_{k,j}\right)$	[140]
$C_l\rho\alpha^2\left(v_{i,k}v_{k,j}+v_{i,k}v_{j,k}\right)$	[162]

Здесь $\alpha=\Delta=\max\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}$, $v_{ij}=\partial v_i/\partial x_j$.

Рассмотрим уравнение изменения количества движения для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}.$$

Согласно теореме Кельвина о циркуляции

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_l\mathbf{v}\cdot\mathbf{l}=\oint\limits_l\left(\nu\nabla^2\mathbf{v}\right)\cdot d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — контур интегрирования.

Уравнения Навье–Стокса в α-форме получаются при помощи применения оператора фильтрации, основанного на принципах теоремы Кельвина

$$\widehat{\mathbf{v}}=g*\mathbf{v}=L\mathbf{v}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{v}=L^{-1}\widehat{\mathbf{v}}.$$

В теореме Кельвина контур интегрирования $\mathbf{l}(\mathbf{v})$ заменяется на $\mathbf{l}(\widehat{\mathbf{v}})$. В качестве оператора L^{-1} выбирается оператор Гамильтона

$$\mathbf{v}=\left(1-\alpha^2\nabla^2\right)\widehat{\mathbf{v}},\quad p=P-\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{v}}|^2-\frac{\alpha^2}{2}|\widehat{\nabla\mathbf{v}}|^2.$$

Уравнение изменения количества движения в α-форме имеет следующий вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\,\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\widehat{v}_j-v_j)v_i-\alpha^2\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_i}\right].$$

Фильтрованные уравнения Навье–Стокса имеют вид

$$\frac{\partial\widetilde{v}_i}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\widetilde{v}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}-\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Компоненты тензора подсеточных напряжений находятся из соотношения

$$\tau_{ij}=\widetilde{v_iv_j}-\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j.$$

Интерпретируем скорость v_i в уравнениях Навье–Стокса, записанных в α-форме, как фильтрованную скорость $\widetilde{v}_i$ в подсеточной модели. Тогда компоненты тензора подсеточных напряжений в α-форме имеют вид

$$\tau_{ij}^{\alpha}=(\widehat{v}_j-v_j)-\alpha^2\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_i}=$$

$$=-\alpha^2\left(\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}-\widehat{v}_i\nabla^2\widehat{v}_j\right)-\alpha^4\left(\nabla^2\widehat{v}_i\right)\left(\nabla^2\widehat{v}_j\right).$$

Интерпретируем скорость $\widehat{v}_i$ в фильтрованных уравнениях Навье–Стокса, записанных в α-форме, как фильтрованную скорость $\widetilde{v}_i$ в подсеточной модели. Применим фильтр «крышка» к α-форме уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial\widehat{v}_i}{\partial t}+\frac{\partial\widehat{v}_i\widehat{v}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial\widehat{P}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\widehat{v}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\widehat{\widehat{v}_i\widehat{v}_j}-\widehat{v}_i\widehat{v}_j\right)-\alpha^2\left(\widehat{\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_i}}+\widehat{v}_j\widehat{\nabla^2\widehat{v}_i}\right)\right].$$

Компоненты тензора подсеточных напряжений в α-модели имеют вид

$$\tau_{ij}^{f\alpha}=\left(\widehat{\widehat{v}_i\widehat{v}_j}-\widehat{v}_i\widehat{v}_j\right)-\alpha^2\left(\widehat{\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_i}}+\widehat{v}_j\widehat{\nabla}^2\widehat{v}_i\right)=$$

$$=\left(\widehat{\widehat{v}_i\widehat{v}_j}-\widehat{\widehat{v}}_i\widehat{\widehat{v}}_j\right)-\alpha^2\widehat{\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\widehat{v}_k}{\partial x_i}}-\alpha^2\left(\widehat{v}_j\widehat{\nabla}^2\widehat{v}_i-\widehat{\widehat{v}}_j\nabla^2\widehat{\widehat{v}}_i\right)+$$

$$+\alpha^2\widehat{\widehat{v}}_i\nabla^2\widehat{\widehat{v}}_j-\alpha^2\left(\nabla^2\widehat{\widehat{v}}_i\right)\left(\nabla^2\widehat{\widehat{v}}_j\right).$$

В противоположность тензору подсеточных напряжений τ_{ij}, тензоры τ_{ij}^{α} и $\tau_{ij}^{f\alpha}$ не являются симметричными и инвариантными к преобразованию пространственных координат. Тем не менее, дивергенция

тензоров τ_{ij}^{α} и $\tau_{ij}^{f\alpha}$, по-прежнему, удовлетворяет свойству инвариантности.

В модели с обращением свертки используется разложение [48]

$$L^{-1} = [I - (I - L)]^{-1} = I + (I - L) + (I - L)^2 + \ldots,$$

где I — тождественный оператор. Ограничиваясь в разложении линейными членами, получим

$$v_i = L^{-1} * \widetilde{v}_i \approx \widetilde{v}_i + \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i\right).$$

Для разности скоростей имеет место соотношение

$$v_i - \widetilde{v}_i = \int [v_i(\mathbf{x}) - v_i(\mathbf{x} + \mathbf{x}')]\, g(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' =$$

$$= \int \left(-\frac{\partial v_i}{\partial x_j} x'_j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\, \partial x_m} x'_k x'_m + \ldots \right) g(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' \approx -\frac{\Delta^2}{24} \nabla^2 v_i(\mathbf{x}). \quad (3.16)$$

Используя соотношение (3.16), получим

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j \approx \left(\widetilde{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i \widetilde{\widetilde{v}}_j\right) -$$

$$- \alpha^2 \left[\left(\widetilde{\widetilde{v}_j \nabla^2 \widetilde{v}_i} - \widetilde{\widetilde{v}}_j \nabla^2 \widetilde{\widetilde{v}}_i \right) + \left(\widetilde{\widetilde{v}_i \nabla^2 \widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i \nabla^2 \widetilde{\widetilde{v}}_j \right) \right] + +$$

$$+ \alpha^4 \left(\widetilde{\nabla^2 \widetilde{v}_i \nabla^2 \widetilde{v}_j} - \nabla^2 \widetilde{\widetilde{v}}_i \nabla^2 \widetilde{\widetilde{v}}_j \right). \quad (3.17)$$

Тогда $\tau_{ij}^{f\alpha} = \tau_{ij}^{\alpha s} + \widehat{\tau}_{ij}^{\alpha}$, где $\tau_{ij}^{\alpha s}$ получаются из соотношения (3.17), записанного для скорости v_i и с использованием фильтра «крышка».

Привлечение уравнений Навье–Стокса, записанных в α-форме [140], позволяет уменьшить число степеней свободы по сравнению с исходной формой записи уравнений Навье–Стокса относительно мгновенной скорости до величины

$$\left(\frac{N_{\mathrm{DNS}}}{N_\alpha}\right)^{4/3} \sim \left(\frac{\alpha}{L}\right)^{4/3} \mathrm{Re},$$

где $N_{\mathrm{DNS}} \sim \mathrm{Re}^{9/4}$. При этом $l_\alpha^3 \simeq \alpha l_k^2$, а параметр α связывается с шириной сеточного фильтра [103].

Следует отметить, что нелинейные подсеточные модели приводят к спектру $E(\kappa) \sim \kappa^{-3}$, что отличается от закона Колмогорова–Обухова, согласно которому $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$.

3.4.4. Модели высокого порядка. В смешанной модели высокого порядка (Mixed 2/4 Model) компоненты тензора подсеточных напряжений находятся из соотношения

$$\tau_{ij} = -\left(\nu_4 \nabla^2 \widetilde{s}_{ij} + \nu_2 \widetilde{s}_{ij}\right). \quad (3.18)$$

Коэффициент ν_2 находится при помощи модели Смагоринского

$$\nu_2 = C_2\Delta^2|\widetilde{s}|.$$

Коэффициент ν_4, называемый гипервязкостью (hyperviscosity), требует моделирования. Гипервязкость обычно представляется в виде

$$\nu_4 = C_4\Delta^4|\widetilde{s}|.$$

После подстановки соотношение (3.18) примет вид

$$\tau_{ij} = -\left(C_4\Delta^4|\widetilde{s}|\nabla^2\widetilde{s}_{ij} + C_2\Delta^2|\widetilde{s}|\widetilde{s}_{ij}\right).$$

Слагаемое с гипервязкостью имеет вид, схожий с моделью структурной функции, учитывающей члены высокого порядка.

Для улучшения результатов расчетов используется оценка модельных коэффициентов C_2 и C_4 при помощи динамической процедуры (Mixed Dynamic 2/4 Model). При этом происходит увеличение порядка уравнений Навье–Стокса (со 2-го до 4-го), что требует постановки дополнительных граничных условий (обычно полагается, что $\nu_4 \to 0$ вблизи границы).

Имеющиеся примеры использования модели на практике включают моделирование однородной и изотропной турбулентности и течение в канале. Модель демонстрирует хорошую устойчивость, но требует увеличения времени счета приблизительно на 20%.

3.5. Спектральные модели

Для удобства применения спектральных методов для дискретизации фильтрованных уравнений Навье–Стокса разрабатываются модели, сформулированные в Фурье-пространстве (Spectral Model, SM).

Предполагая статистическую изотропность диссипирующих вихрей, вводится преобразование Фурье $\widehat{f}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ искомой функции $f(\mathbf{x}, t)$. Используя фильтр Фурье (spectral cut-off filter), получим

$$\widetilde{\widehat{f}} = \begin{cases} \widehat{f}, & \text{если } \kappa \leqslant \kappa_c, \\ 0, & \text{если } \kappa > \kappa_c, \end{cases}$$

где $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$, $\kappa_c = \pi/\Delta x$.

В Фурье-пространстве диссипативный член в уравнениях Навье–Стокса имеет вид $-\nu\kappa^2\widehat{v}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$. Подсеточное слагаемое, соответствующее диссипативному слагаемому в фильтрованных уравнениях переноса, в волновом пространстве моделируется в виде

$$-\nu_{\text{sgs}}(\kappa|\kappa_c)\kappa^2\widehat{v}_i(\boldsymbol{\kappa}, t).$$

Подсеточная вязкость вычисляется по формуле

$$\nu_{\text{sgs}}(\kappa, \kappa_c, t) = 0{,}441C_k^{-3/2}\left[\frac{E(\kappa_c, t)}{\kappa_c}\right]^{1/2} X(\kappa/\kappa_c),$$

в которой $X(\kappa/\kappa_c) = 1$ при $\kappa/\kappa_c < 1/3$ и возрастает при других значениях κ/κ_c. В модели [106] используется соотношение

$$X(\kappa/\kappa_c) = 1 + 34{,}2\exp\left(-3{,}03\frac{\kappa}{\kappa_c}\right).$$

Волновое число κ_c соответствует спектру Колмогорова–Обухова. Значение постоянного множителя получается из предположения, что и при $\kappa > \kappa_c$ спектр удовлетворяет закону Колмогорова–Обухова. Очевидно, что это условие не выполняется для переходных режимов течения и вблизи стенки.

В спектральной версии динамической модели (Spectral Dynamic Model, SDM) вместо постоянного модельного коэффициента используется функциональная зависимость вида [296]

$$\phi(m) = 0{,}31C_k^{-3/2}\frac{5-m}{1+m}(3-m)^{1/2},$$

где m характеризует наклон спектра $E(\kappa) \sim \kappa^{-m}$. Приведенное соотношение подтверждается при $m \leqslant 3$ (при $m > 3$ полагается, что $\nu_{\text{sgs}} = 0$). При этом подсеточное число Прандтля находится из соотношения $\text{Pr}_{\text{sgs}} = 0{,}18(5-m)$.

В физическом пространстве соотношение для расчета подсеточной вязкости принимает вид

$$\nu_{\text{sgs}}(\mathbf{x}, \Delta x) = \frac{2}{3}C_k^{-3/2}\left[\frac{E_x(\kappa_c)}{\kappa_c}\right]^{1/2},$$

где $E_x(\kappa_c)$ представляет собой локальный спектр кинетической энергии, рассчитанный при помощи модели структурной функции.

В многомасштабных моделях (Variational Mutliscale, VMS) делается попытка устранить недостатки модели Смагоринского и ее модификаций. Подсеточная вязкость вводится не для всех разрешимых масштабов турбулентного движения, а только для наиболее мелких из них, соответствующих бо́льшим волновым числам [184, 185]. Уравнения, соответствующие малым волновым числам, не изменяются. Разделение масштабов возможно при решении уравнений Навье–Стокса спектральным методом и является достаточно произвольным, например, $N/2$, где N — общее число гармоник.

При этом постоянный коэффициент в формуле для подсеточной вязкости обеспечивает более точные результаты, чем его оценка при помощи динамической процедуры [185]. В работе [179] показана чувствительность модели VMS к процедуре разделения масштабов.

Спектральные модели позволяют получить более точные результаты, чем модель Смагоринского и ее модификации, однако находят применение для расчетов достаточно простых течений (пограничные слои, свободная турбулентность).

3.6. Модели с обращением свертки

При фильтрации уравнений Навье–Стокса обычно используется неявный фильтр, ширина пропускания которого связывается с шагом или объемом ячейки разностной сетки [135] (неявная фильтрация). В моделях с обращением свертки (Deconvolution Model, DM) применяется дискретный фильтр того или иного вида (явная фильтрация).

3.6.1. Явная фильтрация. Операция явной фильтрации сеточной функции $u_i = u(x_i)$ определяется следующим образом

$$\widetilde{u}_i = G_1 * u_i = \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} \alpha_j f_{i+j}.$$

Для дискретного фильтра на пятиточечном шаблоне $\nu_l + \nu_r = 4$. Ширина фильтра связывается с шагом расчетной сетки $\Delta = h\pi/\kappa_c$. В волновом пространстве имеет место следующее разложение

$$G(\kappa) = \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} \alpha_j \exp(i\kappa j).$$

Момент k-го порядка в точке x находится по формуле

$$M^k(x) = \int G_1(x - x')(x - x')^k \, dx',$$

которая принимает следующий дискретный вид

$$M_i^k = \frac{1}{\Delta^k} \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} \alpha_j \left(x_i - x_{i+j}\right)^k.$$

Коэффициенты в разложении момента k-го порядка находятся из следующих условий [304].

1. Преобразование Фурье от фильтра равняется 1 при $\kappa = 0$

$$\widehat{G}_1(0) = 1, \quad \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} \alpha_j = 1.$$

2. Преобразование Фурье от фильтра равняется 0 при $\kappa = \kappa_n = \pi$

$$\widehat{G}_1(\pi) = 0, \quad \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} (-1)^j \alpha_j = 1.$$

3. Моменты M_i^k порядка $k = 1, \ldots, K-1$ равняются 0 для $\forall i$.

4. Для минимизации дисперсионной ошибки необходимо минимизировать мнимую часть от фильтрующей функции

$$\int_0^\pi \mathrm{Im}\left[G(\kappa)\right]^2 d\kappa = \frac{\pi}{2} \sum_{j=-\nu_l}^{\nu_r} \left(\alpha_j - \alpha_{-j}\right)^2 \to \min.$$

Соотношения для расчета коэффициентов α_j приводятся в работе [48]. Определение волнового числа отсечки является произвольным для фильтров с гладким преобразованием Фурье $\widehat{G}(\kappa)$. Обычно используется критерий $|\widehat{G}_1(\kappa_c)| = 1/2$, откуда $\kappa_c = 2\pi/3$.

3.6.2. Подсеточные напряжения. В модели, использующей обращение свертки, подсеточные напряжения записываются в следующем виде [291]

$$\tau_{ij} = \widehat{v_i^* v_j^*} - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j$$

или

$$\tau_{ij} = \widehat{v_i^* v_j^*} - \widehat{v_i^*}\,\widehat{v_j^*}.$$

В том случае, когда $v_i^* = \widetilde{v}_i$, получается модель подобных масштабов.

Модель с обращением свертки позволяет вычислить величину v_i по известному значению $\widetilde{v}_i$ [48, 49] (фильтрованная скорость определяется как $\widetilde{v} = Gv$). В частности, если фильтрующая функция является обратимой, то обращение свертки тривиально

$$v_i = G^{-1}(\widetilde{v}_i).$$

Основная трудность состоит в том, что фильтры с компактным носителем в Фурье-пространстве являются необратимыми (применение фильтра приводит к потере информации). На практике используются приближенные методы обращения свертки. Величина v_i аппроксимируется величиной v_i^*, которая строится из фильтрованной скорости $\widetilde{v}_i$.

Используя приближения различного порядка, запишем

$$v \approx G_0 * \widetilde{v} = \widetilde{v};$$

$$v \approx G_1 * \widetilde{v} = 2\widetilde{v} - \widetilde{\widetilde{v}};$$

$$v \approx G_2 * \widetilde{v} = 3\widetilde{v} - 3\widetilde{\widetilde{v}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{v}}}.$$

В модели [48, 49] тензор подсеточных напряжений имеет вид

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i^* v_j^*} - \widetilde{v}_i^* \widetilde{v}_j^*.$$

Обращение свертки вычисляется на основе приближенного подхода

$$v_i \approx v_i^* = Q_N * \widetilde{v}_i, \quad Q_N = \sum_{n=0}^{N} (I - G)^n \simeq G^{-1},$$

где I — тождественный оператор

$$v = I * v = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) v(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}.$$

При $N = 0$ получается модель подобных масштабов.

В развернутом виде имеем

$$v_i^* = \widetilde{v}_i + (I - G) * \widetilde{v}_i + (I - G) * [(I - G) * \widetilde{v}_i] + \dots .$$

Модели данного типа не являются диссипативными. Для повышения устойчивости вычислений в правую часть уравнения изменения количества движения вводится слагаемое вида $-\chi(I - Q_N * G) * \widetilde{v}$, где χ — релаксационный параметр, для определения которого может использоваться динамическая процедура. Такой подход эквивалентен явной фильтрации разрешимого поля скорости на каждом шаге по времени.

С вычислительной точки зрения, использование обращения свертки оказывается менее дорогостоящим, чем оценка параметра Смагоринского при помощи динамической процедуры [267].

3.6.3. Фильтрация уравнения переноса. Обычно для простоты используется приближение $u^* \approx u$. Используя приближенное обращение свертки, получим

$$u^* = Q_N * \widetilde{u}.$$

Формула обращения имеет вид (Cittert formula)

$$Q_N = G_1^{-1} = \sum_{n=0}^{N} (I - G_1)^n .$$

Для конечно-разностных схем высокого порядка хорошие результаты дает приближение при $N = 5$. При более высоких значениях результаты расчетов практически не изменяются, а более низкие значения приводят к существенным диссипативным эффектам. На границах расчетной области шаблон фильтра становится односторонним.

В качестве явного фильтра используется гауссовский фильтр

$$G(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\xi}{2}\right)^2\right],$$

где $\xi = \kappa/h$. Вторичная фильтрация проводится при помощи дискретного фильтра (Pade filter), который в узле j разностной сетки дает [214]

$$a\widetilde{u}_j + \frac{b}{2}(\widetilde{u}_{j-1} + \widetilde{u}_{j+1}) = \alpha u_{j-1} + u_j + \alpha u_{j+1},$$

где $a = b = \alpha + 1/2$. При этом $\kappa_c = \pi/4$ для сеточного и $\kappa_c = \pi/8$ для пробного фильтра. Тогда $\alpha = -0{,}2$ при $\Delta = 5h$ и $\alpha = -0{,}43$ при $\Delta = 8h$.

Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0. \tag{3.19}$$

После фильтрации $\widetilde{G} * u$ уравнение (3.19) принимает вид

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{\frac{\partial F(u)}{\partial x}} = 0$$

или

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + G * \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + G * \frac{\partial F(u^*)}{\partial x} = G * \left[\frac{\partial F(u^*)}{\partial x} - \frac{\partial F(u)}{\partial x}\right],$$

где $u^* = G * \widetilde{u}$. Полагая $u = u^*$ и учитывая, что $G * u^* \approx G * u = \widetilde{u}$, после пренебрежения в последнем равенстве квадратными скобками, получим

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + G * \frac{\partial F(u^*)}{\partial x} = 0. \tag{3.20}$$

Для дискретизации уравнения (3.20) по времени используется схема Эйлера 1-го порядка точности

$$\widetilde{u}^{n+1} = \widetilde{u}^n - \Delta t \left[G * \frac{\partial F(u^*)}{\partial x}\right]^n$$

или

$$G * u^{*n+1} = G * \left[u^* - \Delta t \frac{\partial F(u^*)}{\partial x}\right]^n.$$

Перепишем уравнение (3.20) в виде

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{\frac{\partial F(u^*)}{\partial x}} = 0. \tag{3.21}$$

Для моделирования переноса энергии от масштабов $|\kappa| \leqslant \kappa_n$ к масштабам $|\kappa| > \kappa_n$ энергия из интервала $\kappa_c < |\kappa| \leqslant \kappa_n$ представляется членом $\chi(I - G_2) * \widetilde{u}$ и вычитается из правой части (3.21). Полоса пропускания вторичного фильтра $G_2 = Q_N * G_1$ больше полосы пропускания фильтра G_1. При положительных значениях χ релаксационный член является диссипативным по построению.

В релаксационном члене $-\chi(1 - G_2) * \widetilde{\mathbf{v}}$ используется вторичный фильтр высокого порядка $G_2 = Q_N * G$, который действует только в области высоких волновых чисел [326]. Различные фильтры показаны на рис. 3.5.

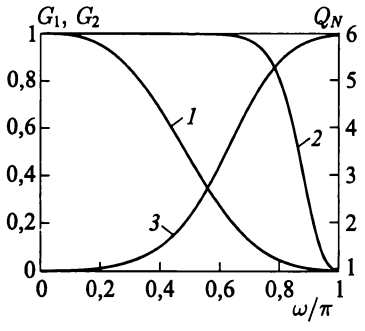


Рис. 3.5. Явный фильтр на равномерной сетке G (кривая *1*), фильтр $\widehat{G}_2$ (кривая *2*), $\widehat{Q}_N$ при $N = 5$ (кривая *3*)

Уравнение (3.21) примет вид

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{\frac{\partial F(u^*)}{\partial x}} = -\chi(I - G_2) * \widetilde{u}. \tag{3.22}$$

Релаксационный параметр χ оценивается динамически из решения $\widetilde{u}$ как функция пространственных координат и времени с учетом того, что

энергия не должна скапливаться в масштабах $\kappa_c < |\kappa| \leqslant \kappa_n$. Кинетическая энергия в данном интервале волновых чисел оценивается при помощи структурной функции 2-го порядка для функции $\phi = (I - G_2) * \widetilde{u}$ [218]. Структурная функция имеет вид

$$D_2(\xi, t) = ||\phi(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}, t) - \phi(\boldsymbol{\xi}, t)||^2_{|\mathbf{r}|=h}.$$

Уравнение (3.22) дискретизируется при помощи схемы Эйлера, полагая $\chi = \chi_0 \sim 1/\Delta t$ в начальный момент времени и $\chi = 0$ во всех точках расчетной области.

В переделах шага интегрирования Δt оценивается разность $D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=0} - D_2(\boldsymbol{\xi}, t)$, показывающая количество энергии, сгенерированной в пределах этого интервала времени для масштабов $\kappa_c < |\kappa| \leqslant \kappa_n$. Разность $D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=0} - D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=\chi_0}$ показывает количество энергии, диссипирующей за счет добавления релаксационного члена. Тогда

$$\chi = \chi_0 \frac{D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=0} - D_2(\boldsymbol{\xi}, t)}{D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=0} - D_2(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t)|_{\chi=\chi_0}}.$$

Для обеспечения численной устойчивости налагается ограничение на релаксационный параметр ($0 \leqslant \chi \leqslant 1/\Delta t$).

Релаксационные слагаемые включаются во все уравнения [74, 274]. При использовании консервативных переменных эти слагаемые имеют вид

$$-\chi_1 \left(\overline{\rho} - \overline{\rho^*}\right), \quad -\chi_2 \left[\widetilde{(\rho v_i)} - \widetilde{(\rho v_i *)}\right], \quad -\chi_3 \left(\widetilde{e} - \widetilde{e^*}\right).$$

Несмотря на линейность уравнения неразрывности, добавление релаксационного члена требуется для обеспечения устойчивости решения. Коэффициенты χ_i определяются при помощи динамической процедуры. Количество энергии, содержащееся в области высоких волновых чисел, оценивается с использованием аппроксимации структурной функции. Количество энергии должно оставаться приблизительно постоянным для того, чтобы гарантировать хорошее разрешение.

Проводится один шаг по времени без и с добавлением релаксационного члена. Новая величина χ получается как взвешенная величина предыдущего значения и отношения сгенерированной энергии к диссипируемой. Этот подход приводит к существенным колебаниям параметра в пространстве и времени. Для сглаживания используется фильтрация с волновым числом отсечки $\kappa_c' = \pi/8 \approx \kappa_c/5$, что аналогично осреднению по однородным направлениям в динамической модели. В области, где сетка сгущается, полагается $\chi = 0$. Для устойчивости также требуется, чтобы $\chi \geqslant 0$ и $\chi < 1/\Delta t$ [304], где Δt — шаг интегрирования по времени.

3.6.4. Метод явной фильтрации и реконструкции. Природа сеточного фильтра остается, как правило, неизвестной и различной для каждого слагаемого в уравнении изменения количества движе-

ния, поскольку для дискретизации конвективных и диффузионных потоков обычно используются разностные схемы различного порядка (схемы высокой разрешающей способности для конвективных потоков и центрированные разностные схемы 2-го порядка для диффузионных потоков).

В противоположность этому подходу, в методе декомпозиции скорости (Velocity Partitioning Approach, VPA) используется гладкий фильтр (top-hat или гауссовский фильтр), позволяющий разделить разрешимые масштабы турбулентного движения и масштабы, размер которых оказывается меньше полосы пропускания фильтра [97]. Разностная сетка (сеточный фильтр) разделяет масштабы турбулентного движения с размерами, меньшими ширины фильтра (Sub-Filter Scale, SFS), на разрешимые и неразрешимые. Разрешимые подсеточные масштабы (Resolvable SFS, RSFS) получаются при помощи разложения в ряд и обращения свертки (оператора фильтрации), в то время как неразрешимые масштабы (Unresolvable SFS, USFS), называемые также подсеточными масштабами (Sub-Grid Scale, SGS), моделируются при помощи тех или иных приближений, как правило, при помощи моделей вихревой вязкости (как RSFS, так и SGS-масштабы зависят от разрешимых масштабов турбулентного движения). Такой подход известен также как метод явной фильтрации и реконструкции [172, 173] (Explicit Filtering and Reconstruction).

Два фильтра (явный и сеточный) разбивают спектр кинетической энергии турбулентности на три части (рис. 3.6). Вертикальная линия показывает сеточный фильтр, разделяющий масштабы турбулентного

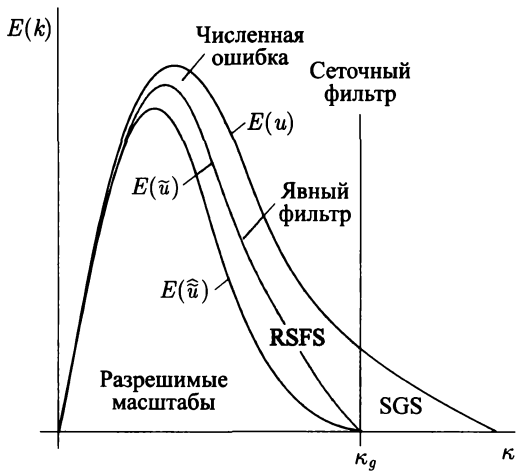


Рис. 3.6. Разрешимые и неразрешимые масштабы турбулентного движения при использовании явной фильтрации

движения на разрешимые и подсеточные (соответствующее волновое число обозначается через κ_g).

Разрешимые масштабы турбулентного движения соответствуют волновым числам $|\kappa| \leqslant \kappa_c$, масштабы, представляемые на данной сетке — волновым числам $|\kappa| \leqslant \kappa_n$, масштабы, не представляемые на данной сетке — волновым числам $|\kappa| > \kappa_n$, где κ_c — волновое число отсечки явного фильтра, κ_n — волновое число Найквиста (Nyquist wavenumber). Представляемые, но неразрешимые масштабы $\kappa_c < |\kappa| \leqslant \kappa_n$ используются для моделирования влияния непредставляемых масштабов на разрешимые масштабы.

Масштабы турбулентного движения, соответствующие низким волновым числам $\kappa \leqslant \kappa_c$, разрешаются на сетке (разрешимые масштабы, имеющие скорость $\widetilde{\overline{v}}_i$, где тильда обозначает явный фильтр, а черта — дискретный фильтр). Масштабы RSFS, лежащие в заштрихованной области между волновыми числами отсечки, которые соответствуют полосам пропускания явного и сеточного фильтра, также разрешаются на выбранной сетке. Поскольку для реконструкции RFSF-масштабов используется некоторый приближенный метод обращения свертки, это дает численную ошибку (область, лежащая выше кривой явного фильтра), которая увеличивается вблизи волнового числа отсечки, соответствующего сеточному фильтру [108]. Явный фильтр демпфирует гармоники решения, соответствующие большим волновым числам, и разрешимое поле скорости воспроизводится с большей точностью [108]. Область волновых чисел справа от вертикальной линии $\kappa > \kappa_n = 2\Delta x$ соответствует подсеточным масштабам, которые не воспроизводятся на сетке и подлежат моделированию.

При этом обычно предполагается, что операции фильтрации и дифференцирования по пространству являются коммутативными, что выполняется только для однородных фильтров [163].

Компоненты тензора напряжений, соответствующие разрешимым и подсеточным масштабам, представляются в виде разложения

$$\tau_{ij} = \tau_{\mathrm{SFS}} = \widetilde{\overline{v_i v_j}} - \widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j = \underbrace{\left(\widetilde{\overline{v_i v_j}} - \widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j\right)}_{\tau_{\mathrm{SGS}}} + \underbrace{\left(\widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j - \widetilde{\overline{v}}_i \widetilde{\overline{v}}_j\right)}_{\tau_{\mathrm{RSFS}}}. \qquad (3.23)$$

Подсеточные напряжения τ_{SGS} зависят от разрешения сетки (масштабов турбулентного движения, меньших ширины пропускания сеточного фильтра) и содержат нелинейный член $\widetilde{\overline{v_i v_j}}$, требующий моделирования. Напряжения τ_{RSFS} зависят от разности между точным и фильтрованным полем скорости в пределах области разрешения и теоретически могут быть воспроизведены точно, поскольку являются функцией $\bar{v}_i$, которая получается при помощи обращения свертки.

Требования к явному фильтру, используемому для реконструкции RSFS-напряжений, состоят в его гладкости в волновом пространстве и более широкой полосе пропускания по сравнению с размером шага разностной сетки (он используется для разложения в ряд в процедуре

реконструкции). Это имеет важное значение при дискретизации уравнений Навье–Стокса при помощи метода конечных разностей или метода конечных объемов, демпфируя конечно-разностные ошибки [108]. Для спектральных методов метод явной фильтрации и реконструкции не дает преимуществ перед традиционным подходом, использующим неявную фильтрацию уравнений Навье–Стокса и подсеточные модели для их замыкания [108].

Метод явной фильтрации и реконструкции имеет преимущества перед моделями вихревой вязкости при расчете низкорейнольдсовых областей течения [173], в которых разрешения сетки оказывается недостаточным для воспроизведения энергосодержащих масштабов, а SFS-масштабы являются доминирующими по сравнению с разрешимыми масштабами [108].

3.6.5. Метод приближенного обращения свертки. Для нахождения RSFS-напряжений обычно используется метод приближенного обращения свертки [48, 49] (Approximate Deconvolution Method, ADM), а в качестве модели для расчета USFS-напряжений — динамическая модель. Такой подход известен также как метод динамической реконструкции [108, 173] (Dynamic Reconstruction Model, DRM). Комбинация процедуры реконструкции и модели вихревой вязкости дает обобщенную версию (версию высокого порядка) смешанной модели [63]. Однако использование процедуры реконструкции и явной фильтрации позволяет выделить вклад RSFS- и SGS-напряжений в явном виде.

В методе ADM используется явная фильтрация потоков в уравнении изменения количества движения, приближенное обращение свертки и добавление релаксационных слагаемых в правую часть уравнения переноса, которые учитывают влияние масштабов, не представляемых на данной сетке, и позволяют обеспечить устойчивость вычислительной процедуры.

1. Обращение свертки (deconvolution)

$$u^{*n} = Q * \widetilde{u}^n.$$

2. Интегрирование (integration)

$$u^{*n} \to u^{*n+1}.$$

3. Фильтрация (filtering)

$$\widetilde{u}^{n+1} = G * u^{*n+1}.$$

Шаги 1 и 3 обычно объединяются, что дает

$$Q * G * u^{*n} \to u^{*n}.$$

В модели подобных масштабов [63] для оценки RSFS-напряжений разрешимая скорость приравнивается фильтрованной скорости $\overline{v}_i \approx \widetilde{\overline{v}}_i$.

В подходе с приближенным обращением свертки [48] разрешимая скорость выражается через фильтрованную скорость при помощи разложения в ряд. В случае явного фильтра общего вида G разложение имеет вид

$$\bar{v}_i = \widetilde{\bar{v}}_i + (I - G) * \widetilde{\bar{v}}_i + (I - G) * [(I - G) * \widetilde{\bar{v}}_i] + \dots .$$

Для изотропного коробочного фильтра (top-hat filter) с полосой пропускания Δ разложение скорости в ряд Тэйлора на равномерной сетке имеет вид

$$\bar{v}_i = \widetilde{\bar{v}}_i - \frac{\Delta^2}{24}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial z^2}\right) + \frac{7\Delta^4}{5760}\left(\frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial z^4}\right) + \\ + \frac{5\Delta^4}{1728}\left(\frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial x^2 \partial z^2}\right) + O(\Delta^6).$$

Производные по x, y и z нечетного порядка исчезают из-за свойства симметрии. Применение фильтров другого типа приводит к похожему разложению, но с другими значениями постоянных коэффициентов (в частности, для гауссовского фильтра вместо коэффициента 7/5760 используется значение 1/1152).

Подставляя разложение скорости в (3.23), получим [48, 49]

$$\tau_{\mathrm{RSFS}} = \widetilde{v_i^* v_j^*} - \widetilde{\bar{v}}_i^* \widetilde{\bar{v}}_j^*.$$

Представим после скорости в виде $u = \exp(i\kappa x)$ и получим соотношение для разрешимых напряжений в одномерном случае $\tau_{\mathrm{RSFS}} = \widetilde{u^2} - \widetilde{u}^2$. Фильтрованная скорость представляется в виде

$$\widetilde{u} = H(\kappa\Delta)\exp(i\kappa x).$$

Ограничиваясь в разложении в ряд Тэйлора слагаемыми порядка $O(\Delta^6)$, получим следующее представление нефильтрованной скорости

$$u^* = A(\kappa\Delta)H(\kappa\Delta)\exp(i\kappa x).$$

Представление коэффициентов H и A зависит от выбранного фильтра:

— коробочный фильтр

$$H(\kappa\Delta) = \frac{\sin(\kappa\Delta/2)}{\kappa\Delta/2};$$

$$A(\kappa\Delta) = \left(1 + \frac{\kappa^2\Delta^2}{24} + \frac{7\kappa^4\Delta^4}{5760}\right);$$

— гауссовский фильтр

$$H(\kappa\Delta) = \exp\left(-\frac{\kappa^2\Delta^2}{24}\right);$$

$$A(\kappa\Delta) = \left(1 + \frac{\kappa^2\Delta^2}{24} + \frac{\kappa^4\Delta^4}{1152}\right).$$

В подходе [108] разложение ограничивается членами 4-го порядка на равномерной сетке

$$\tau_{\mathrm{RSFS}} = \widetilde{\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i\widetilde{\widetilde{v}}_j - \frac{\Delta^2}{24}\widetilde{\widetilde{v}_i\nabla^2\widetilde{v}_j} - \frac{\Delta^2}{24}\widetilde{\widetilde{v}_j\nabla^2\widetilde{v}_i} + \frac{\Delta^2}{24}\widetilde{\widetilde{v}}_i\nabla^2\widetilde{\widetilde{v}}_j + \frac{\Delta^2}{24}\widetilde{\widetilde{v}}_j\nabla^2\widetilde{\widetilde{v}}_i.$$

Первые два слагаемых являются аналогом леонардовых напряжений. Полученное соотношение приводит к модели подобный масштабов [63], если ограничиться в разложении членами 2-го порядка. После преобразований получается следующее соотношение [108]

$$\tau_{\mathrm{RSFS}} = \frac{\Delta^2}{12}\widetilde{\frac{\partial\widetilde{\overline{v}}_i}{\partial x_m}\frac{\partial\widetilde{\overline{v}}_j}{\partial x_k}} + O(\Delta^4).$$

Подходы [48, 49] и [108] являются эквивалентными. В методе ADM сначала получается выражение для RSFS-напряжений, а затем проводится его дискретизация. В методе [108] сначала проводится дискретизация фильтрованных уравнений Навье–Стокса, а затем выводится соотношение для разрешимых напряжений. Подход [108] позволяет легко выразить ошибку усечения через ширину фильтра.

Подход ADM не имеет других параметров, кроме ширины явного фильтра, а также не делает никаких предположений о природе RSFS-движений.

Ширина явного фильтра связывается с полосой пропускания сеточного фильтра $\Delta = 2\Delta_g = 2h$, где h — шаг разностной сетки [172]. При использовании динамической модели полосы пропускания сеточного и явного фильтра связаны при помощи соотношения $\widehat{\Delta} = 2\Delta$, следовательно, $\widehat{\Delta} = 4h$ (в динамической модели, не использующей явную фильтрацию, $\widehat{\Delta} = 2\Delta_g$).

Приведем соотношения для скорости после применения различных фильтров:

— дискретный top-hat фильтр

$$\widetilde{v}_i = 0{,}25v_{i-1} + 0{,}5v_i + 0{,}25v_{i+1};$$

— пробный фильтр

$$\widehat{v}_i = 0{,}5v_{i-1} + 0{,}5v_{i+1};$$

— явный и пробный фильтр

$$\widehat{\widetilde{v}}_i = 0{,}125v_{i-2} + 0{,}25v_{i-1} + 0{,}25v_i + 0{,}25v_{i+1} + 0{,}125v_{i+2}.$$

Преимущество подхода ADM перед спектральными подсеточными моделями состоит в том, что подход формулируется в физическом пространстве. Это позволяет использовать для дискретизации фильтрованных законов сохранения разностные схемы высокого порядка

точности в областях сложной геометрической конфигурации. При этом не возникает дополнительной погрешности, связанной с коммутативностью операций свертки и дифференцирования.

Ожидается, что модели с обращением свертки позволят учесть анизотропность, а также влияние таких факторов, как, например, силы плавучести, Кориолиса, давления и других. Общий недостаток моделей данного типа состоит в отсутствии единого подхода к построению соответствующих замыкающих соотношений и недостаточной апробированности на практике.

3.6.6. Упрощенный подход. В подходе ADM взаимодействие между разрешимыми масштабами и малыми масштабами учитывается при помощи процедуры обращения свертки с добавлением релаксационного члена, обеспечивающего устойчивость вычислений [304].

Моделируемое слагаемое имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial \widetilde{v_i^* v_j^*}}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}{\partial x_j} \right] + \chi \left(I - Q_N * G \right) * \widetilde{v}_i,$$

где $v_i^* = Q_N * \widetilde{v}_i$.

В модифицированном подходе скорость v_i^* заменяется на $\widetilde{v}_i$, что приводит к соотношению

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial \widetilde{\widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}{\partial x_j} \right] + \chi \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i \right),$$

где $\widetilde{v}_i = Q_N * G * v_i$.

В наиболее простой реализации подхода ADM, получившем наименование модели с релаксационным членом (Relaxation Term, RT), производными скорости пренебрегается и сохраняется только релаксационный член [284], в котором используется высокочастотный фильтр

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \chi \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\widetilde{v}}_i \right) = \chi H_N * \widetilde{v}_i.$$

В случае неотрицательных значений χ и равномерной сетки релаксационное слагаемое является чисто диссипативным.

В простейшем случае используется постоянное значение релаксационного параметра $\chi = c_1 = \text{const}$. Релаксационный параметр имеет размерность, обратную времени, что является существенным недостатком модели. В более сложном случае релаксационный параметр вычисляется по формуле $\chi = c_2 |s(\widetilde{\mathbf{v}})|$ или $\chi = c_3 |s(H * \widetilde{\mathbf{v}})|$. Модельные коэффициенты c_2 и c_3 являются безразмерными. На практике $c_1 = 0{,}1$ 1/с, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$.

3.7. Другие модели

Методы функции плотности вероятности (Probability Density Function, PDF) находят широкое применение для моделирования переноса скалярных величин в реагирующих турбулентных потоках и двухфазных течениях [324].

В работах [156] (Filtered Density Function, FDF) и [188] (Filtered Mass Density Function, FMDF) развиты подходы для моделирования течений с постоянной и переменной плотностью. В этих подходах вероятностные модели используются только для моделирования источниковых членов в уравнениях переноса. Моделирование подсеточных газодинамических эффектов производится обычным образом (например, при помощи подсеточных моделей вихревой вязкости).

Для моделирования крупных вихрей сложных турбулентных течений, в том числе, с учетом химических реакций, разрабатывается метод фильтрованной функции плотности вероятности скорости [166] (Velocity Filtered Density Function, VFDF). В уравнении переноса функции плотности вероятности влияние подсеточных напряжений учитывается в замкнутой форме. Уравнение переноса является эквивалентным системе стохастических дифференциальных уравнений, для решения которой используется метод Монте–Карло. Результаты расчетов для трехмерного слоя смешения имеют хорошее согласование с данными, полученными в эйлеровой постановке при помощи модели Смагоринского и динамической модели, а также, данными прямого численного моделирования.

С вычислительной точки зрения, вероятностные подходы, с одной стороны, оказываются намного затратнее по сравнению с моделями подсеточной вихревой вязкости, а с другой, намного дешевле по сравнению с прямым численным моделированием.

Турбулентность характеризуется самоподобием процессов, протекающих на различных масштабах. Для их описания развита теория ренормализованных групп. С точки зрения геометрического строения, самоподобные структуры являются фракталами, а анализ таких структур строится на основе дробных производных.

В подходе [288] используется фрактальная модель подсеточной турбулентности (фрактальный подход к изучению турбулентности представляется достаточно перспективным и продуктивным).

Результаты расчетов по фрактальной модели согласуются с данными, полученными на основе модели Смагоринского и динамической модели.

Имеются стохастические подходы для моделирования компонент тензора подсеточных напряжений. В модели [53] постоянная Смагоринского вычисляется при помощи формулы

$$C_S'^2 = C_S^2 (1 + X),$$

где X — стохастический процесс с заданной дисперсией и временны́м масштабом.

Несмотря на перспективность, стохастические модели подсеточного переноса не нашли широкого применения на практике в связи с существенными затратами машинного времени.

3.8. Подсеточные потоки тепла и массы

Выражение для подсеточного теплового потока записывается в форме закона Фурье

$$q_j = -\lambda_{\text{sgs}}(\widetilde{T})\,\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}.$$

Подсеточная теплопроводность выражается через подсеточное число Прандтля и подсеточную вязкость $\lambda_{\text{sgs}} = c_p \mu_{\text{sgs}}/\text{Pr}_{\text{sgs}}$. Подсеточному числу Прандтля присваивается, как правило, постоянное значение $\text{Pr}_{\text{sgs}} = 0{,}4 \div 0{,}9$ (при этом $\text{Pr}_{\text{sgs}} = 0{,}9$ вблизи стенки и $\text{Pr}_{\text{sgs}} = 0{,}5 \div 0{,}8$ в свободном сдвиговом потоке). В ряде подходов для его оценки используется динамическая процедура [161].

На основе спектральных подходов показывается, что $\text{Pr}_{\text{sgs}} = 0{,}18 \times$ $\times\,(5 - m)$, где m имеет смысл показателя степени в спектре кинетической энергии турбулентности $E(\kappa) \sim \kappa^{-m}$ $(0 < m < 3)$.

Другой подход состоит в использовании обобщенной гипотезы Буссинеска [131]

$$q_j = -C_t\,\frac{k}{\varepsilon}\,\tau_{jk}\,\frac{\partial T}{\partial x_k},$$

где $k = \tau_{ii}/2$, $\varepsilon = k^{3/2}/\Delta$.

Наряду с алгебраическими моделями, находят применение дифференциальные модели с одним и двумя уравнениями [268].

Составляющие вектора диффузионного потока массы компонента α находятся из соотношения, записанного в форме закона Фика

$$m_{\alpha j} = -\overline{\rho} D_{\text{sgs}}\,\frac{\partial \widetilde{Y}_\alpha}{\partial x_j}.$$

Коэффициент подсеточной диффузии выражается через подсеточную вязкость и подсеточное число Шмидта $D_{\text{sgs}} = \nu_{\text{sgs}}/\text{Sc}_{\text{sgs}}$. Для вычисления подсеточной вязкости используется формула Смагоринского, описываемая соотношением (3.2). Подсеточному числу Шмидта присваивается, как правило, постоянное значение ($\text{Sc}_{\text{sgs}} \sim 0{,}7$), что подразумевает подобие между подсеточным переносом количества движения и массы. Для учета зависимости подсеточного числа Шмидта от локальных характеристик потока используется динамическая процедура [161].

3.9. Учет сжимаемости

При моделировании течений сжимаемого газа моделирования требуют не только подсеточные напряжения, но также и слагаемые в уравнении изменения энергии. Вид и представление дополнительных слагаемых, связанных с подсеточным переносом тепла, зависят от выбранной формы записи уравнения энергии [236]. В различных исследованиях используется уравнение для удельной внутренней энергии [245], удельной энтальпии [301], полной энергии [258], полной энергии разрешимого поля скорости.

3.9.1. Основные расчетные соотношения. На основе данных прямого численного моделирования применительно к слою смешения при $M = 0{,}2 \div 0{,}6$ показано, что слагаемые, связанные с подсеточными флуктуациями давления и подсеточной вязкой диссипацией в уравнении изменения энергии являются величинами одного порядка по сравнению с подсеточным тепловым потоком [332, 333]. Вместо уравнения переноса внутренней энергии или энтальпии рекомендуется использовать уравнение переноса полной энергии (в этом уравнении все подсеточные слагаемые могут быть представлены в консервативной форме) и учитывать подсеточную вязкую диссипацию [332]. Пренебрежение нелинейностями в диффузионных слагаемых, связанных с зависимостью коэффициентов переноса от температуры, в уравнениях изменения количества движения и энергии является вполне допустимым [333].

В уравнении для полной энергии подсеточный тепловой поток обычно моделируется с использованием гипотезы вихревой вязкости, а слагаемыми, связанными с подсеточными флуктуациями давления и подсеточной вязкой диссипацией, пренебрегается [258]. В [202] при моделировании однородной изотропной турбулентности учитываются подсеточный тепловой поток и слагаемое, связанное с подсеточной турбулентной диффузией, а подсеточной вязкой диффузией пренебрегается.

Данные прямого численного моделирования однородной и изотропной турбулентности используются для параметризации подсеточных моделей вихревой вязкости в уравнении изменения полной энергии [236] (расчеты проводятся на сетке 256^3).

В дополнение к уравнениям неразрывности и изменения количества движения используются уравнение изменения энергии, записанное для внутренней энергии $u = c_v T$, энтальпии $h = u + p/\rho$ или полной энергии $e = u + v_i v_i/2$.

Фильтрованные уравнения неразрывности и изменения количества движения имеют следующий вид:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_j\right) = 0;$$

— уравнение изменения количества движения

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p}\delta_{ij} - \widetilde{\sigma}_{ji}\right) - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}.$$

В дополнение к уравнениям неразрывности и изменения количества движения используется уравнение изменения энергии, которое записывается в различной форме:

— уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_j\widetilde{u}\right) = -\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial x_j} - \overline{p}\overline{s_{kk}} + \widetilde{\sigma}_{ji}\widetilde{s}_{ij} - c_v\frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \Pi + \varepsilon_v;$$

— уравнение для энтальпии

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{v}_j\widetilde{h}\right) = -\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \widetilde{v}_j\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \widetilde{\sigma}_{ji}\widetilde{s}_{ij} - c_v\frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \Pi + \varepsilon_v;$$

— уравнение для полной энергии

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\overline{\rho}\widetilde{e} + \overline{p}\right)\widetilde{v}_j\right] = -\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{ij}\widetilde{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\gamma c_v Q_j + \frac{1}{2}\Gamma_j - D_j\right).$$

Компоненты тензора напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 2\widetilde{\mu}\widetilde{s}_{ij} - \frac{2}{3}\widetilde{\mu}\widetilde{s}_{kk}\delta_{ij};$$

$$\widetilde{q}_j = -\widetilde{\lambda}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}.$$

Компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Неизвестными подсеточными корреляциями являются тензор вязких напряжений τ_{ij}, тепловой поток Q_j, слагаемое, связанное с расширением трубок тока Π, вязкая диссипация ε_v, турбулентная диффузия $\partial\Gamma_j/\partial x_j$ и вязкая диффузия $\partial D_j/\partial x_j$. Приведенные члены находятся из следующих соотношений:

$$\tau_{ij} = \overline{\rho}\left(\widetilde{v_j v_j} - \widetilde{v}_i\widetilde{v}_j\right);$$

$$Q_j = \overline{\rho}\left(\widetilde{v_j T} - \widetilde{v}_i\widetilde{T}\right);$$

$$\Pi = \overline{p s_{kk}} - \overline{p}\overline{s_{kk}};$$

$$\varepsilon_v = \overline{\sigma_{ji}s_{ij}} - \widetilde{\sigma}_{ji}\widetilde{s}_{ij};$$

$$\Gamma_j = \overline{\rho}\left(\widetilde{v_j v_k v_k} - \widetilde{v}_j\widetilde{v_k v_k}\right);$$

$$D_j = \overline{\sigma_{ij}v_i} - \widetilde{\sigma}_{ij}\widetilde{v}_i.$$

Для того чтобы выразить неизвестные корреляции, связанные с давлением (pressure-gradient и pressure-diffusion correlations), через слагаемые Q_j и Π используется уравнение состояния. На практике предполагается, что имеет место соотношение [332, 333]

$$\overline{\mu(T)s_{ij}} = \mu(\widetilde{T})\widetilde{s}_{ij}.$$

Такое же соотношение используется и для других коэффициентов переноса.

3.9.2. Уравнение изменения количества движения. Для представления тензора подсеточных напряжений используются модели различной степени сложности.

В случае сжимаемой среды тензор подсеточных напряжений раскладывается на девиаторную и шаровую части

$$\tau_{ij} = \underbrace{\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}}_{\text{девиаторная}} + \underbrace{\frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}}_{\text{шаровая}}.$$

Девиаторная часть моделируется с использованием сжимаемой формы модели Смагоринского. Шаровая часть либо добавляется к фильтрованному давлению, поскольку $\tau_{kk} = \gamma M_{sgs}^2 \widetilde{p}$, либо не учитывается при малых подсеточных числах Маха [149].

Для слабосжимаемых турбулентных течений используется модель [347], представляющая собой обобщение модели Смагоринского

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2C_S^2\Delta^2\overline{\rho}\,|\widetilde{s}|\left(\widetilde{s}_{ij} - \frac{1}{3}\widetilde{s}_{kk}\delta_{ij}\right) = C_S^2\alpha_{ij};$$

$$\tau_{kk} = 2C_I\Delta^2\overline{\rho}\,|\widetilde{s}|^2 = C_I\alpha.$$

Здесь $C_I = 0{,}09$. В модели [347] диагональные компоненты тензора подсеточных напряжений моделируются отдельно. При сравнительно малых подсеточных числах Маха (при $M_{sgs} < 0{,}4$) ими пренебрегается [347]. Изменение модельного коэффициента C_I в достаточно широких пределах (в интервале $0 < C_I < 0{,}066$) оказывает слабое влияние на результаты расчетов [350].

В модели [245] коэффициенты C_S и C_I находятся при помощи динамической процедуры [161, 221].

Смешанная модель, которая использует в качестве модели вихревой вязкости подход [347], имеет вид [149, 350]

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = C_S\alpha_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij};$$

$$\tau_{kk} = C_I\alpha + A_{kk}.$$

Здесь

$$A_{kk} = \overline{\rho}\left(\widetilde{\widetilde{v}_i\widetilde{v}_j} - \widetilde{\widetilde{v}}_i\widetilde{\widetilde{v}}_j\right).$$

Модельные коэффициенты смешанной модели определяются при помощи динамической процедуры. При этом численные расчеты [236] показывают, что оценка коэффициента C_S в смешанной модели при помощи динамической процедуры дает более точные результаты, чем оценка коэффициентов C_S и C_I. Данные прямого численного моделирования по коэффициенту C_S достаточно хорошо совпадают с теоретическим значением, в то время как значение коэффициента C_I оказываются существенно завышенным [236].

В модели [119] вводится модифицированное давление, что приводит к появлению дополнительного слагаемого в уравнении состояния

$$P = \overline{\rho} R \widetilde{T} + \frac{3\gamma - 5}{6} \tau_{kk}.$$

При $\gamma = 5/3$ дополнительный член равняется нулю, а при $\gamma = 7/5$ и малых подсеточных числах Маха он становится пренебрежимо малым.

3.9.3. Уравнение изменения энергии. В отличие от расчетов свободного слоя смешения [332], результаты [236] показывают, что подсеточные слагаемые Π и ε_v, учитывающие расширение трубок тока и вязкую диссипацию, являются пренебрежимо малыми.

Тепловой поток моделируется при помощи модели вихревой вязкости

$$Q_j = -\frac{\overline{\rho}\nu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} = -C\Delta^2 \frac{\overline{\rho}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} |\widetilde{s}| \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}.$$

Коэффициент C и подсеточное число Прандтля полагаются постоянными или оцениваются при помощи динамической процедуры [236].

Смешанная модель для теплового потока имеет вид [301]

$$Q_j = -C\Delta^2 \frac{\overline{\rho}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} |\widetilde{s}| \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} + \overline{\rho} \left(\widetilde{\widetilde{v}_j \widetilde{T}} - \widetilde{\widetilde{v}}_j \widetilde{\widetilde{T}} \right).$$

Данные прямого численного моделирования показывают, что смешанная модель является более точной по сравнению с моделями подсеточной вихревой вязкости [236].

Для моделирования слагаемого, описывающего вязкую диссипацию в уравнении изменения внутренней энергии или энтальпии, используются различные модели [332]

$$\varepsilon_v^1 = c_{\varepsilon 1} \left(\widetilde{\widetilde{\sigma}_{ji} \widetilde{s}_{ij}} - \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ji} \widetilde{\widetilde{s}}_{ij} \right);$$

$$\varepsilon_v^2 = c_{\varepsilon 2} \frac{\overline{\rho}}{\Delta} \widetilde{q}^3, \quad \widetilde{q}^2 \sim \Delta^2 |\widetilde{s}|^2;$$

$$\varepsilon_v^3 = c_{\varepsilon 3} \overline{\rho} \Delta \widetilde{q}^3, \quad \widetilde{q}^2 \sim \widetilde{\widetilde{v}_k \widetilde{v}_k} - \widetilde{\widetilde{v}}_k \widetilde{\widetilde{v}}_k.$$

Здесь $c_{\varepsilon 1} = 8$, $c_{\varepsilon 2} = 1{,}6$, $c_{\varepsilon 3} = 0{,}6$. Верхний индекс относится к модели.

Модель 1 представляет собой модель подобных масштабов. Модели 2 и 3 учитывают вклад подсеточной вязкой диссипации как отношение

куба подсеточного масштаба скорости $\widetilde{q}$ к линейному масштабу. В модели 2 масштаб скорости выбирается так же, как в модели вихревой вязкости [347], а в модели 3 — так же, как в модели подобных масштабов.

В работе [236] производится динамическая оценка модельных коэффициентов, что дает $c_{\varepsilon 1} = 2{,}4$, $c_{\varepsilon 2} = 0{,}03$, $c_{\varepsilon 3} = 0{,}25 \div 0{,}4$. Эти значения существенно ниже тех, которые используются в [332] (коэффициент $c_{\varepsilon 3}$ при этом монотонно увеличивается в указанном интервале). Результаты расчетов показывают, что наилучшую точность дает модель подобных масштабов.

В некоторых случаях слагаемое, описывающее подсеточную турбулентную диффузию в уравнении изменения полной энергии, не выражается в явном виде, а добавляется в подсеточный тепловой поток [119]

$$(\widetilde{\overline{\rho} e v_j} + \widetilde{\overline{p} v_j}) - (\widetilde{\overline{\rho} e} \widetilde{v}_j + \widetilde{\overline{p}} \widetilde{v}_j) = \gamma \overline{\rho} \left(\widetilde{v_j T} - \widetilde{v}_j \widetilde{T} \right) + \Gamma_j = -\frac{\nu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}.$$

В таком подходе турбулентная диффузия зависит от градиента температуры. В изотермических течениях $\Gamma_j \neq 0$ несмотря на то, что $\partial \widetilde{T} / \partial x_j = 0$. Подход [119] нельзя считать оправданным.

В модели [202] считается, что $\widetilde{v}_i \simeq \widetilde{\widetilde{v}}_i$, а для моделирования подсеточной турбулентной диффузии получается соотношение

$$\Gamma_j \simeq \widetilde{v}_k \tau_{jk}.$$

В [236] строится модель подобных масштабов с динамической оценкой одного и двух модельных коэффициентов. Сравнение показывает, что модель дает приблизительно такую же точность, как и модель [202].

Подсеточная вязкая диффузия, описываемая слагаемым $\partial D_j / \partial x_j$, дает наименьший вклад в уравнение полной энергии, составляя около 5 % от дивергенции Q_j [236]. Обычно этим членом пренебрегается, за исключением работы [236], в которой он оценивается на основе модели подобных масштабов

$$D_j = C_L \left(\widetilde{\widetilde{\sigma}_{ij} \widetilde{v}_i} - \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij} \widetilde{\widetilde{v}}_i \right).$$

Модель показывает хорошие показатели точности.

Помимо отдельных моделей для слагаемых в уравнении изменения полной энергии, в [236] оценивается также точность моделирования слагаемого, описывающего подсеточный перенос

$$E_{\text{sgs}} = \gamma c_v Q_j + \Gamma_j - D_j.$$

Подсеточный тепловой поток моделируется при помощи смешанной модели, турбулентная диффузия — при помощи модели подобных масштабов, а вязкая диффузия не учитывается. Несмотря на то, что предсказание отдельных составляющих является не всегда хорошим, моде-

лирование подсеточного вклада всех слагаемых показывает неплохую точность.

В случае достаточно низких значений подсеточного числа Маха (при $M_{sgs} < 0{,}4$) учет сжимаемости в подсеточной модели оказывает довольно слабое влияние на результаты численного моделирования [236]. При этом следует отметить, что общие подходы к учету сжимаемости в моделях подсеточного переноса отсутствуют, а данные численных расчетов являются довольно разрозненными и несистематизированными.

3.10. Сравнение различных моделей подсеточного переноса

Прогресс в области вычислительной техники, приведший к созданию мощных вычислительных систем, оснащенных процессорами с высокой тактовой частотой и средствами параллельной обработки данных, позволил провести систематические методические исследования и тестирование моделей подсеточного переноса на ряде модельных задач. К таким задачам относятся, в частности, полностью развитое турбулентное течение в канале, течение в слое смешения и обтекание кругового цилиндра, а также ряд других канонических течений.

Интерес к этим задачам является не случайным. В течение длительного времени они служат испытательным полигоном не только для проверки работоспособности различных схем замыкания осредненных и фильтрованных уравнений Навье–Стокса, но и схем дискретизации конвективных и диффузионных потоков, расчетных шаблонов, методов и процедур решения. По этим задачам накоплен обширный объем вычислительной информации, а также имеются надежные и неоднократно проверенные данные измерений. Периодическое возвращение к решению данных задач на различных уровнях развития компьютерной техники и программного обеспечения позволяет не только провести верификацию точности и эффективности разрабатываемых вычислительных комплексов, но и углубить представления о физике течения.

С точки зрения постановки граничных условий и требований к сетке, наиболее простой задачей является затухание периодической однородной и изотропной турбулентности. В работе [116] проводится детальное сравнение характеристик различных подсеточных моделей при $\mathrm{Re}_\lambda = 40$ (модель с постоянной подсеточной вязкостью, модель Смагоринского, в которой подсеточная вязкость рассчитывается на основе инварианта тензора скоростей деформаций или тензора вращения и подсеточной кинетической энергии турбулентности). Сравнение результатов позволяет сделать вывод о том, что все подсеточные модели имеют приблизительно одинаковую точность, включая модель с постоянной подсеточной вязкостью, а модификации модели Смагоринского не приводят к улучшению численных оценок.

Различные модели подсеточной вязкости, используемые для моделирования полностью развитого турбулентного течения в канале с квадратной формой поперечного сечения в плане, приводятся в табл. 3.2. Число Рейнольдса вычисляется по средней скорости в поперечном сечении $\mathrm{Re} = \rho u_m h/\mu$. Приведенные данные, в частности, показывают, что имеет место тенденция к применению более сложных и обоснованных подсеточных моделей, чем модель Смагоринского.

Таблица 3.2. Подсеточные модели, используемые для моделирования течения в канале

Год	Подсеточная модель	Re	Сетка	Ссылка
1991	Смешанная модель	5810	$32 \times 65 \times 65$	[231]
1991	Модель Смагоринского с демпфирующей функцией	6200	$64 \times 50 \times 50$	[243]
1994	Спектральная модель	49000	$256 \times 64 \times 64$	[307]
1996	Динамическая модель и двухслойная модель пограничного слоя	42000	$82 \times 34 \times 34$	[62]
1997	Динамическая модель	15000	$128 \times 64 \times 64$	[46]
2000	Модель Смагоринского с демпфирующей функцией	4800	$257 \times 100 \times 100$	[89]
2001	Динамическая модель	10320	$128 \times 101 \times 101$	[260]
2002	Модель структурной функции с ограничением	6000	$120 \times 60 \times 60$	[281]
2002	Модель Смагоринского и динамическая модель	6000	$64 \times 64 \times 64$	[233]

Приведем результаты [233] в сравнении с данными [200]. Расчеты выполнялись при $\mathrm{Re} = 2800$ ($\mathrm{Re}_\tau = 180$) и $\mathrm{Re} = 12500$ без использования какой-либо подсеточной модели, с использованием модели Смагоринского и динамической модели (в качестве тестового фильтра используется коробочный фильтр) на сетках $16 \times 64 \times 16$ (сетка 1, $\Delta x^+ = 71$, $\Delta z^+ = 36$), $32 \times 64 \times 32$ (сетка 2, $\Delta x^+ = 36$, $\Delta z^+ = 18$), $64 \times 64 \times 64$ (сетка 3, $\Delta x^+ = 18$, $\Delta z^+ = 9$). Для всех сеток $\Delta y^+_{\min} = 1$ и $\Delta y^+_{\max} = 16{,}8$. В продольном направлении выставляются условия повторения течения.

При $\mathrm{Re} = 2800$ и в отсутствие какой-либо одсеточной модели расчеты на сетке 1 приводят к существенным погрешностям, давая отличие профиля скорости в пристеночной области от логарифмического распределения. При этом расчеты на сетках 2 и 3 демонстрируют сравнимую точность в отношении распределения средней скорости. Вместе с тем, расчеты на сетках 1 и 2 переоценивают максимальное

значение кинетической энергии и недооценивают максимальное значение напряжения сдвига около стенки. Коэффициент поверхностного трения составляет $6{,}7 \cdot 10^{-3}$ на сетке 1, $7{,}86 \cdot 10^{-3}$ на сетке 2 и $8{,}2 \cdot 10^{-3}$ на сетке 3. По сравнению со значением, полученном в [200], которое составляет $8{,}18 \cdot 10^{-3}$, это дает погрешность в 18%, 4% и 1% соответственно. Средняя скорость в поперечном сечении канала примерно одинакова на всех сетках и демонстрирует хорошую корреляцию с данными [200].

Динамическая модель дает несколько больший уровень подсеточной вязкости в центральной части канала по сравнению с моделью Смагоринского, а также предсказывает ее более быстрое уменьшение по мере приближения к стенке канала. На сетке 2 обе модели переоценивают максимальные значения рейнольдсовых напряжений вблизи стенки — модель Смагоринского на 23%, а динамическая модель на 10% по сравнению с данными [200] (на сетке 3 разница составляет 3–4%). Подключение модели Смагоринского и динамической модели приводит к уменьшению значения коэффициента поверхностного трения до значений $6{,}05 \cdot 10^{-3}$ и $5{,}28 \cdot 10^{-3}$ на сетке 1, $6{,}93 \cdot 10^{-3}$ и $6{,}46 \cdot 10^{-3}$ на сетке 2, $7{,}85 \cdot 10^{-3}$ и $7{,}37 \cdot 10^{-3}$ на сетке 3. Расчеты по средней скорости достаточно хорошо согласуются между собой и с данными [200].

При увеличении числа Рейнольдса до 12800 (расчеты проводятся на сетке 3) модель Смагоринского приводит почти к трехкратному завышению значений касательных напряжений, а положение максимума их распределения оказывается ближе к стенке ($y^+ \sim 15$ по модели Смагоринского и $y^+ \sim 30$ по динамической модели). Как и в случае малых чисел Рейнольдса, динамичесекая модель предсказывает более низкие значения подсеточной вязкости в пристеночной области по сравнению с моделью Смагоринского. Коэффициент поверхностного трения составляет $4{,}59 \cdot 10^{-3}$ в отсутствие подсеточной модели, $4{,}52 \cdot 10^{-3}$ для модели Смагоринского и $3{,}91 \cdot 10^{-3}$ для динамической модели, что меньше экспериментального значения $5{,}55 \cdot 10^{-3}$.

Сравнение вычислительной эффективности различных моделей подсеточной вязкости приводятся в табл. 3.3 для полностью развитого турбулентного течения в канале (по данным [268], основанным на псевдоспектральном коде). В качестве точки отсчета принимается время, необходимое для проведения расчета на основе модели Смагоринского.

Процедура реконструкции и приближенного обращения свертки (метод ADM) приводит к существенному увеличению вычислительных затрат по сравнению с моделями вихревой вязкости [108]. Соответствующие сравнительные характеристики приводятся в табл. 3.4 для полностью развитого течения в канале (сравнение проводится относительно модели Смагоринского). В отсутствие какой-либо подсеточной модели, время счета оказывается меньше, а при использовании других моделей — больше, чем по модели Смагоринского. Индекс в обозначении метода ADM относится к числу учитываемых слагаемых в формуле приближенного обращения свертки.

Таблица 3.3. Сравнение вычислительных затрат для различных подсеточных моделей

Модель	CPU
Без подсеточной модели	0,93
Смагоринского	1,00
Динамическая	1,07
Смешанная + динамическая	1,11
Лагранжевая динамическая	1,21
Смешанная + лагранжевая динамическая (1 коэффициент)	1,28
Смешанная + лагранжевая динамическая (2 коэффициента)	1,31

Таблица 3.4. Сравнение ресурсов для метода ADM

Модель	CPU	
	Модель	Общие
Смагоринского	1,00	1,00
Динамическая	2,33	1,17
DRM-ADM0	4,59	1,52
DRM-ADM1	4,75	1,51
DRM-ADM2	5,10	1,57
DRM-ADM5	5,92	1,67
DRM-ADM10	7,29	1,85

Сравнение вычислительных ресурсов применительно к расчету свободного слоя смешения [166] показано в табл. 3.5. Применение метода функции плотности вероятности (подход VFDF) приводит к довольно существенному увеличению времени счета по сравнению с традиционными подсеточными моделями, что делает его неконкурентоспособным. Тем не менее, модели подобно рода являются перспективными для моделирования химически реагирующих и двухфазных течений (в основном, они используются для обоснования других моделей подсеточ-

Таблица 3.5. Сравнение вычислительных затрат для расчета слоя смешения

Модель	Сетка	CPU
Без подсеточной модели	$33 \times 33 \times 33$	1,00
Модель Смагоринского	$33 \times 33 \times 33$	1,05
Динамическая модель	$33 \times 33 \times 33$	2,19
VFDF	$33 \times 33 \times 33$	30
DNS	$193 \times 193 \times 193$	178

ного переноса, а непосредственно в расчеты вовлекаются сравнительно редко).

Имеется широкий цикл работ, посвященных численному моделированию турбулентного обтекания кругового цилиндра при помощи различных подходов к описанию турбулентности[29, 30], а также измерению локальных и интегральных характеристик потока [352]. В связи с этим, оно является идеальным и в то же время достаточно сложным тестом для оценки возможностей различных подходов, претендующих на расчет течений с обширным отрывом при высоких числах Рейнольдса.

Начиная с $\mathrm{Re} = 190$, ламинарное обтекание кругового цилиндра приобретает трехмерный нестационарный характер, сопровождающийся образованием в поле течения спиралевидных ориентированных по потоку вихрей. Для расчета турбулентного обтекания цилиндра используются подходы, основанные на численном решении нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса (LES и DES).

Незначительная интенсивность спиралевидных вихревых структур послужила стимулом к использованию квазидвумерной постановки задачи в рамках решения URANS и модели Ментера [29, 30] (при $\mathrm{Re} = 4{,}5 \cdot 10^4$).

Ограниченность подхода, основанного на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, к описанию нестационарного поля течения около кругового цилиндра показана во многих работах [83, 85]. Это послужило стимулом к реализации методов моделирования крупных вихрей и апробации моделей подсеточной вязкости (наиболее широкое распространение получили модель Смагоринского и динамические модели).

Влияние типа подсеточной модели на точность расчета локальных и интегральных характеристик течения около кругового цилиндра показывают табл. 3.6 и табл. 3.7 для различных чисел Рейнольдса. В работе [59] для расчетов используется пакет CFX-5, а в работе [264] — пакет Star-CD на основе схемы MARS и метода PISO.

Во всех случаях сетка содержит около $1{,}5 \cdot 10^6$ ячеек (за исключением работы [59], в которой расчеты производились на сетке, содержащей $2{,}25 \cdot 10^5$ ячеек, чем, по-видимому, и объясняется переоценка коэффициента сопротивления на 30 %). При этом $y^+ \sim 0{,}05 \div 3{,}0$. Шаг по времени выбирается равным $\Delta t \sim 10^{-3} D/U_\infty$, а расчеты проводятся до момента времени $t \sim 10^2 D/U_\infty$, где D — диаметр цилиндра, U_∞ — скорость на бесконечности.

Влияние на точность расчетов оказывает также размер расчетной области. Наибольшая протяженность расчетной области имеет место в работах [232] и [264] (соответственно $65D$ и $40D$), а наименьшая — в работе [59] (она равняется $18D$). Размер расчетной области в направлении оси y изменяется от $9D$ [59] до $30D$ [264] и $50D$ [232]. В направлении оси z выставляются периодические граничные условия.

Таблица 3.6. Сравнение результатов расчетов по обтеканию кругового цилиндра при $\mathrm{Re} = 3900$

Модель	C_D	St	θ_s	l_s/D	$u_{\min}$	Ссылка
Смагоринского	1,200	—	89,0°	—	—	[242]
Ван Дриста	1,097	—	88,5°	1,043	—	[84]
Динамическая	1,016	—	87,4°	1,372	—	[84]
Смагоринского	1,040	0,210	88,0°	1,350	−0,37	[208]
Смагоринского	1,300	0,201	—	1,240	—	[59]
Динамическая	1,000	0,218	87,6°	1,350	−0,31	[232]
Смагоринского	1,150	0,210	90,2°	1,390	−0,33	[264]
Эксперимент	0, 99	0, 215	85,0°±2	$1{,}4 \pm 0{,}1$	$-0{,}24 \pm 0{,}1$	[259]

Таблица 3.7. Сравнение результатов расчетов по обтеканию кругового цилиндра при $\mathrm{Re} = 140\,000$

Модель	C_D	St	θ_s	l_s/D	Ссылка
Смагоринского ($C_S = 0{,}1$)	1,218	0,217	95,16°	0,416	[83]
Смагоринского ($C_S = 0{,}065$)	0,707	0,247	94,58°	0,712	[83]
Динамическая	1,239	0,204	96,37°	0,572	[83]
DES	1,08	0,21	77°	—	[317]
PANS-1	1,02	0,238	105°	—	[167]
PANS-2	1,37	0,26	95,9°	—	[167]
Эксперимент	1,237	0,179	77°	0,44	[93]

Результаты расчетов при помощи PANS обтекания кругового цилиндра при $\mathrm{Re} = 1{,}4 \cdot 10^5$ демонстрируют неплохое согласование с данными измерений [93]. Расчеты проводятся на сетке 85×85 в двумерном (PANS-1, формулировка совпадает с RANS) и $150 \times 135 \times 42$ в трехмерном (PANS-2, промежуточный между RANS и LES) случаях. Расчеты при помощи DES в [317] проводятся на сетке $150 \times 109 \times 42$.

В работе [317] рассматриваются как докритические режимы обтекания, соответствующие отрыву ламинарного пограничного слоя и переходу к турбулентности в оторвавшемся слое смешения, так и закритические, соответствующие отрыву турбулентного пограничного слоя. В случае докритических режимов обтекания для описания перехода используется подход [294] в рамках уравнений Рейнольдса. В случае закритических режимов обтекания во внешнем потоке задается достаточно высокий уровень турбулентной вязкости (отношение порядка 1), гарантирующий быструю турбулизацию пограничного слоя и, следовательно, реализацию закритического режима обтекания независимо от рассматриваемого числа Рейнольдса.

При этом исключается из рассмотрения ряд промежуточных режимов обтекания, характеризующихся разнообразной и сложной струк-

турой потока, например, устойчивыми асимметричными состояниями с ламинарным отрывом от одной и турбулентным отрывом от другой стороны поверхности цилиндра.

Характерной особенностью зависимости силы сопротивления и подъемной силы цилиндра от времени при до- и сверхкритическом режиме обтекания является хаотическая низкочастотная модуляция основного сигнала. С вычислительной точки зрения, данное обстоятельство является неблагоприятным, так как вследствие хаотического характера решения для получения достаточно точной статистической информации о характеристиках среднего течения расчет (с последующим осреднением) проводится в течение длинного промежутка времени.

В работах [83, 85], посвященной расчету докритического обтекания цилиндра при $\mathrm{Re} = 140\,000$, отмечается, что успешное решение задачи моделирования промежуточных и закритических режимов обтекания круглого цилиндра может рассматриваться как входной билет в мир реальных приложений моделирования крупных вихрей.

Глава 4

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Развитие вычислительной газодинамики и компьютерной техники делает возможным разработку и реализацию методов расчета нестационарных течений вязкого сжимаемого газа в областях сложной геометрической конфигурации. Применение современных методов моделирования турбулентных течений предъявляет ряд специфических требований к вычислительной процедуре.

В данной главе сравниваются требования к вычислительной процедуре и ресурсы, необходимые для проведения численных расчетов на основе различных подходов к описанию турбулентных течений. Разрабатывается подход к дискретизации уравнений Навье–Стокса на неструктурированных сетках в рамках метода конечных объемов и конечно-разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространству. Приводятся особенности формулировки начальных и граничных условий.

4.1. Требования к вычислительной процедуре

Развитие информационных технологий, предназначенных для численного решения задач газодинамики и теплообмена, тесно связано с прогрессом вычислительной техники и развитием пакетов прикладных программ.

4.1.1. Имеющиеся реализации. К настоящему времени накоплен обширный фонд вычислительных алгоритмов, предназначенных для численного моделирования течений жидкости и газа, описываемых уравнениями Эйлера или Навье–Стокса.

Достижения в создании универсальных вычислительных пакетов, предназначенных для решения широкого круга задач газодинамики и теплообмена, выглядят достаточно впечатляюще. Во многом этим они обязаны прогрессу в разработке современных вычислительных систем с параллельной обработкой данных, развитию математических моделей, а также разработке эффективных численных методов.

Универсальные коммерческие CFD-пакеты (например, Fluent, Ansys CFX, Star-CD и другие) представляют собой сложные многокомпонентные системы, имеющие трехступенчатую структуру: сеточный генератор, расчетный модуль, графический интерпретатор результатов.

В пакеты включаются широкие наборы математических моделей управляющих физических процессов, конечно-разностных схем, методов решения систем разностных уравнений, из элементов которых конструируется решение той или иной задачи. Многие пакеты допускают эксплуатацию не только на персональных компьютерах, но и на многопроцессорных вычислительных системах.

Широкое распространение вычислительных пакетов создает иллюзию того, что они позволяют решить любые задачи. На самом деле, используемые в них каталоги математических моделей и конечно-разностных схем далеки от совершенства, поскольку научные изыскания по ним не закончены. Приемлемость многих моделей для решения сложных задач и определение границ их применимости составляет предмет отдельного исследования (многие подходы тестируются на расчетах канонических течений и их приемлемость в более широком диапазоне условий не очевидна). В существенной степени, это относится к реализации современных подходов к моделированию турбулентных течений, например, метода моделирования крупных вихрей.

Имеющиеся публикации показывают, что усилия исследователей концентрируются, в основном, на численной реализации этих подходов, имеющей узкую область специализации и воплощающей последние достижения в области вычислительной газодинамики и теплообмена (в пакетах используются, как правило, устоявшиеся подходы, прошедшие апробацию для задач иного класса).

Детали реализации метода моделирования крупных вихрей для задачи расчета течения вязкой несжимаемой жидкости около кругового цилиндра и некоторых других (течение в канале, обтекание профиля под углом атаки) приводятся в табл. 4.1.

В таблице используются следующие сокращения и условные обозначения:

M — метод дискретизации уравнений Навье–Стокса;
- FDM — метод конечных разностей;
- FVM — метод конечных объемов;

T — разностные схемы для дискретизации по времени;
- AB — метод Адамса–Бэшворта;
- CN — метод Кранка–Николсона;
- IS — неявная схема;
- MC — схема Мак–Кормака;
- RK — метод Рунге–Кутты;

D — разностные схемы для дискретизации диффузионных потоков;

C — разностные схемы для дискретизации конвективных потоков.

Для моделирования течений с подвижными границами используется смешанная эйлерово-лагранжевая дискретизация уравнений Навье–Стокса (Arbitrary Lagrangian–Eulerian, ALE) на неструктурированной подвижной сетке, а также метод решетки Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM). Как правило, такие подходы ограничиваются довольно специфической областью приложения [343].

Таблица 4.1. Реализации метода моделирования крупных вихрей для расчета течения около кругового цилиндра

Метод	Re	Метод дискретизации				Стоимость			Компьютер	Ссылка
		M	T	D	C	сетка	t, ч	Δt, с		
LES	$3{,}9 \cdot 10^3$	FVM	RK-3	CDS-2	UDS-5	401,120,48	200		Cray C90	[242]
LES	10^5	FDM	AB	CN	CDS-2	99,63,10	140	$2 \cdot 10^{-4}$		[254]
LES	$2{,}2 \cdot 10^4$	FVM MAC			QUICK	82,63,16	11 с/ш	$2 \cdot 10^{-2}$	Cray C90	[204]
LES	10^2 $3 \cdot 10^3$ $2 \cdot 10^4$ $1{,}4 \cdot 10^6$	FDM	AB	CN	AB	180,128,16	10 м/ш	$2 \cdot 10^{-3}$	Cray C90	[226]
LES	10^5	FVM MAC			QUICK	250,130,12	80	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	IBM SP2	[349]
LES профиль	$2{,}1 \cdot 10^6$	FVM SIMPLE	IS	CDS-2 CDS-4	UDS-3	720,65,33	180		IBM SP2	[132]
LES	$3{,}9 \cdot 10^3$ $1{,}4 \cdot 10^5$	FVM SIMPLE	RK-3	CDS-2	UDS-1 CDS-2 QUICK HLPA	165,165,64		$2 \cdot 10^{-4}$	NEC SX-4 Fujitsu VPP 700	[84]
LES	$2{,}4 \cdot 10^4$	FVM SIMPLER	CN	CDS-4	HLPA	180,80,120				[155]
LES DNS DNS	10^5 10^5 10^6	FVM FVM FVM				10^6 10^9 10^{12}	10 5000		IBM SP2	[276]
DES	10^5	FDM	IS	CDS-2	UDS-5	142,61,26			PII 266 МГц	[306]
LES	$3{,}9 \cdot 10^3$ $2{,}2 \cdot 10^4$ $1{,}4 \cdot 10^5$	FVM SIMPLE	IS	CDS-2	UDS-3 CDS-4	$9{,}0 \cdot 10^4$ $2{,}3 \cdot 10^5$ $2{,}6 \cdot 10^6$	4 66		Cray T3E 900	[227]
LES DES	$2{,}2 \cdot 10^4$	FVM SIMPLE	IS	CDS-2	UDS-2	32000	66 41		Cray T3E 900	[285]
LES канал	$3{,}8 \cdot 10^4$	FVM	RK-3	CN		64,80,80				[291]
LES канал	$4{,}8 \cdot 10^3$	FVM	MC			257,100,100	150	10^{-7}	Cray T3D	[89]
LES канал	$2{,}0 \cdot 10^3$					97,85,193	180 30 ч		PC Cray T90	[327]
LES плум	1273	FDM	AB	CDS-2		256,128,128	4000	10^{-4}	Cray T3E/64	[353]

Несмотря на имеющиеся многочисленные реализации LES, апробацию широкого круга численных методов и конечно-разностных схем, подходов к реализации граничных условий, требуются дальнейшие усилия в этом направлении.

К преимуществам разрабатываемого подхода относятся возможность работы как на структурированных, так и неструктурированных сетках, использование разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространственным координатам, выбор для дискретизации законов сохранения среднемедианного контрольного объема, применение соотношений для расчета градиента и псевдолапласиана, позволяющих получить более точные результаты на сильно растянутых сетках в пограничном слое, запись соотношений для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов в одинаковой форме, что обеспечивает более простую программную реализацию. Предлагаемый подход позволяет реализовать стратегию адаптации сетки в соответствии с особенностями конкретного течения, а также дает обширные возможности для параллелизации процессов вычислений.

Применение разработанного подхода представляется перспективным для построения параллельной численной библиотеки и прикладных вычислительных систем, к которым предъявляются повышенные требования к расширяемости, модифицируемости и масштабируемости.

4.1.2. Системное и функциональное наполнение. Рассмотрим общие вопросы разработки программного обеспечения, предназначенного для численного моделирования течений вязкого сжимаемого газа, описываемых полными или фильтрованными уравнениями Навье–Стокса, и сформулируем ряд требований к вычислительной процедуре, претендующей на расчет нестационарных течений вязкого сжимаемого газа в сложных пространственных областях.

Численное решение задач механики жидкости и газа подразумевает построение расчетной сетки, подготовку исходных данных, дискретизацию модельных уравнений, решение системы разностных уравнений, а также обработку полученных результатов. Данная схема не является простой последовательностью перечисленных действий, но обладает и обратной связью.

Системное и функциональное наполнение программного обеспечения, претендующего на расчет нестационарных течений вязкого сжимаемого газа в сложных пространственных областях, поясняет рис. 4.1.

4.1.2.1. Расчетные сетки. Построение сетки относится к одному из ключевых моментов численного эксперимента [1, 18, 40, 43]. Сетки различаются идеологией построения и методами решения модельных уравнений (регулярные, блочные, неструктурированные, гибридные).

Регулярные сетки. При решении задач газовой динамики широко применяются регулярные сетки (структурированные сетки с четырехугольными ячейками на поверхности и шестигранными в пространстве). Регулярность заключается в том, что сетка представляет собой упорядоченную по определенным правилам структуру данных с выраженными сеточными направлениями. Для структурированных сеток

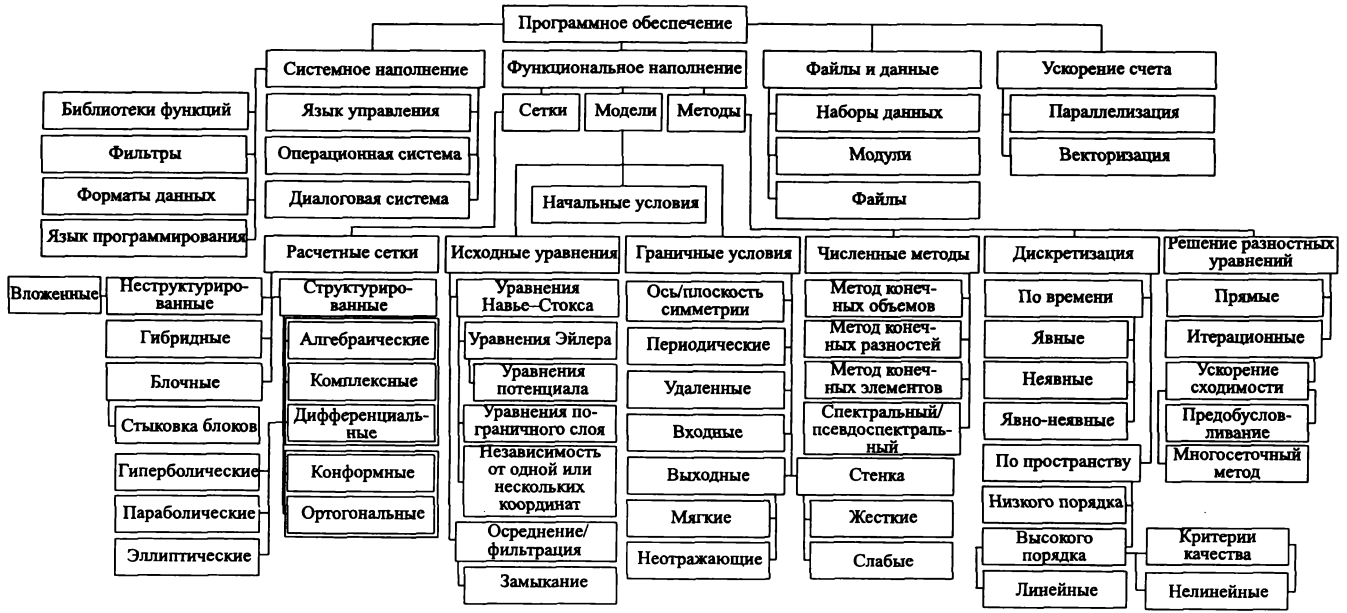


Рис. 4.1. Системное и функциональное наполнение программного обеспечения, предназначенного для решения задач механики жидкости и газа

(structured mesh) сравнительно легко реализуются вычислительные алгоритмы на основе метода конечных разностей или метода конечных объемов и современных монотонных методов высокого порядка точности. Регулярные сетки позволяют использовать методы расщепления для решения многомерных задач и реализовать сравнительно простую векторизацию программы.

Для построения регулярной сетки в сложной области применяется преобразование координат общего вида, основная цель которого состоит в получении равномерной сетки в вычислительном пространстве, представляющем собой прямоугольник [1, 40]. При этом физические границы расчетной области совпадают с координатными линиями в вычислительном пространстве. В уравнениях, записанных в криволинейных координатах, появляются дополнительные члены (параметры преобразования), определяющие отображение физической области на пространство обобщенных координат. Параметры преобразования (компоненты метрического тензора) имеют форму производных, требующих дискретизации.

Дополнительные преимущества дают ортогональные и конформные сетки (преобразованные уравнения упрощаются). В случае ортогональной сетки компоненты метрического тензора, находящиеся не на главной диагонали, равняются нулю. Использование конформного преобразования позволяет сохранить такую же структуру модельных уравнений, записанных в вычислительном пространстве, как и в физической области (параметры преобразования равняются либо нулю, либо единице).

Методы построения регулярных сеток делятся на алгебраические, дифференциальные и методы с использованием теории функция комплексной переменной [1, 40, 43].

Основная идея алгебраических методов состоит в использовании интерполяции граничных данных для расчета внутренних узлов сетки. Контроль за размещением узлов сетки осуществляется с помощью функции растяжения (stretching function). Широкое применение находят метод двух границ (two-boundary method), метод многих поверхностей (multi-surface method) и метод трансфинитной интерполяции (transfinite interpolation).

Дифференциальные сетки строятся на основе решения дифференциальных уравнений в частных производных [1, 40]. В зависимости от типа решаемых уравнений, выделяют гиперболические, параболические и эллиптические сетки.

Гиперболические уравнения решаются эффективными маршевыми методами и требуют сравнительно небольших затрат времени. Гиперболические уравнения лишены механизма диффузионного сглаживания, поэтому разрывы в начальных данных сохраняются во всей расчетной области, что неприемлемо при построении сетки. При этом граничные условия в физической области используются не в полной мере, что оказывается существенным для ряда задач.

Параболическая сетка также строится маршевым методом, что обеспечивает вычислительную эффективность. Вместе с тем, параболические уравнения имеют многие свойства эллиптических уравнений, в частности, механизм диффузионного сглаживания, что гарантирует отсутствие изломов и разрывов в решении. К их недостатку относится невозможность использования всех граничных условий в физической области, поскольку для параболических уравнений в маршевом направлении граничные условия не ставятся.

Эллиптические уравнения (обычно используются уравнения типа Пуассона) позволяют получить гладкое решение и учесть граничные условия на всех границах физической области. В силу принципа максимума для эллиптических уравнений, обеспечивается взаимооднозначность отображений физической и вычислительной областей. При этом реализуется гибкий механизм контроля за размещением внутренних узлов сетки [1, 40]. Недостатки подхода связаны с использованием итерационных методов решения системы разностных уравнений, что приводит увеличению времени, необходимого для построения сетки.

Для построения конформных сеток обычно применяется преобразование Шварца–Кристоффеля [40]. К недостаткам конформных сеток относятся ограничение на размерность сетки (двумерные), нетривиальность выбора последовательности конформных отображений для области сложной конфигурации, сложность построения обратного преобразования (из вычислительного пространства в физическое).

Ортогональные сетки строятся либо методом конформных отображений с последующим растяжением узлов (конформность нарушается, но требование ортогональности соблюдается), либо дифференциальными методами [43] (во многих случаях они приводят к сильной деформации сетки в физической области). Уравнения для построения локально ортогональной сетки получаются на основе принципов вариационного исчисления.

С точки зрения эффективности, предпочтительнее применение алгебраических методов, которые позволяют обеспечить условие локальной ортогональности сетки и ее быструю перестройку. Взаимооднозначность отображений физической и вычислительной областей обеспечивают методы последовательных конформных отображений и дифференциальный метод на основе решения эллиптических уравнений в частных производных [43]. В других случаях взаимооднозначность отображений не гарантируется, поэтому требуется интерактивный процесс генерации сетки с использованием графических средств.

Блочные сетки. Для построения сетки в сложной области производится разделение поля течения на подобласти, в каждой из которых генерируется своя сетка. Выделяют метод многоблочных структур (multi-block structuring или zonal block) и метод иерархических блочных структур (embedding grids). Сетки в разных блоках могут иметь

различные топологические характеристики [38] (допускается также решение различных модельных уравнений в разных блоках).

В многоблочном методе физическая область разбивается на несколько зон или блоков. В соответствии с граничными условиями для каждой подобласти, для каждого блока строится своя сетка (zonal grid). Различают два подхода к организации обмена данными между соседними блоками: сетки из разных блоков стыкуются точно по поверхности раздела физической области на зоны (patched grids) или сетки из соседних блоков пересекаются между собой (overlapped grids). В случае совпадения границ блоков при переходе от одной зоны к другой сохраняется консервативность разностной схемы, и не требуется интерполяция между соседними блоками (однако требование точного совпадения границ блоков накладывает дополнительные условия на сетку). В случае пересечения границ блоков каждый блок допускает перемещение относительно других блоков, а при переходе от одного блока к другому консервативность схемы не гарантируется, и требуется интерполяция искомых функций в пересекающихся областях [38].

Метод иерархических блочных структур подразумевает иерархическую вложенность блоков сетки друг в друга. Нижестоящие по иерархии сетки погружаются в вышестоящие. Реализация подхода требует, чтобы подобласти не были разъединены и включали одна другую полностью или частично.

Неструктурированные сетки. Особенностью неструктурированных сеток (unstructured mesh) является произвольное расположение узлов сетки в физической области. Произвольность расположения узлов понимается в том смысле, что отсутствуют выраженные сеточные направления и нет структуры сетки, подобной регулярным сеткам. Число ячеек, содержащих каждый конкретный узел, изменяется от узла к узлу. Узлы сетки объединяются в многоугольники (двумерный случай) или многогранники (трехмерный случай). Как правило, на плоскости используются треугольные и четырехугольные ячейки, а в пространстве — тетраэдры и призмы. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса обычно применяются метод конечных элементов или метод конечных объемов.

Для неструктурированных сеток необходимо хранить информацию о ячейках, гранях, узлах и ребрах, а в некоторых случаях — расстояние от центра контрольного объема до стенки.

В качестве основных структур данных рассматриваются множества (узлы, внутренние и граничные грани, ячейки различного типа), данные, связанные с множествами (координаты узлов сетки, объемы ячеек, нормали к граням), указатели между множествами (список узлов, формирующих ячейки того или иного типа, список граничных узлов), операции над множествами (цикл по множеству ячеек с использованием указателей на список узлов, формирующих ячейки, для расчета

невязки в узлах сетки, цикл по ненулевым элементам разреженной матрицы).

Преимущество неструктурированных сеток перед регулярными заключается в большей гибкости при дискретизации физической области сложной формы.

Неструктурированные сетки требуют примерно в 5–6 раз больше ячеек, чем регулярные сетки, а для разрешения тонких пограничных слоев — достаточно мелких ячеек вблизи стенки, что ведет к увеличению их общего количества. Тем не менее, процесс генерации неструктурированной сетки легче формализуется и автоматизируется по сравнению с регулярными сетками, занимая меньше времени, что обуславливает их широкое распространение на практике. При этом сравнительно легко реализуются локальные сгущения и адаптация сетки к решению [64].

Гибридные сетки. Гибридная сетка (hybrid mesh) предполагает объединение регулярных и неструктурированных сеток в различных подобластях расчетной области, позволяя сочетать достоинства и снизить влияние недостатков, присущих каждому типу сеток.

Гибридные сетки широко используются при решении задач механики жидкости и газа. Имеются многочисленные публикации, посвященные разработке и реализации вычислительных алгоритмов на неструктурированных сетках [14, 18, 64], а также избранным вопросам дискретизации уравнений Эйлера и Навье–Стокса [10, 16, 129, 130, 191, 247, 248]. В отличие от хорошо разработанных технологий метода конечных элементов, конечно-объемные технологии на неструктурированных сетках характеризуются отсутствием единых принципов, позволяющих провести дискретизацию конвективных и диффузионных потоков, источниковых членов, а также произвести учет граничных условий. Достаточно часто способы дискретизации, имеющие различные характеристики, объединяются.

4.1.2.2. Основные уравнения. Стационарные или нестационарные течения вязкого сжимаемого газа описываются уравнениями Навье–Стокса, а течения идеальной среды — уравнениями Эйлера, которые для безвихревых течений сводятся к уравнениям потенциала.

В зависимости от размерности решаемой задачи, используется трехмерная формулировка исходных уравнений или их сокращенный вариант — свойство независимости от одной или нескольких пространственных координат (плоские или осесимметричные течения). Моделирование течений с преимущественным направлениям развития потока (течения в пограничных слоях или струях) проводится на основе параболизованных уравнений Навье–Стокса.

Для расчетов турбулентных течений используется осреднение или фильтрация уравнений Навье–Стокса с последующим замыканием полученных уравнений при помощи тех или иных приближений. Прямое численное моделирование и моделирование крупных вихрей являются

принципиально трехмерными подходами, поэтому использование двумерной формулировки задачи рассматривается как полезное, с точки зрения сокращения затрат машинного времени, но необоснованное допущение.

4.1.2.3. Начальные условия. В момент времени $t = 0$ задаются начальные распределения скорости, температуры и давления. При моделировании стационарных течений начальные условия не играют роли. Тем не менее, их удачное задание позволяет сократить затраты машинного времени на получение статистически стационарного решения. В случае нестационарных расчетов поле течения в существенной степени определяется удачным заданием начальных условий.

4.1.2.4. Граничные условия. При решении полных уравнений Навье–Стокса требуется задание граничных условий на всех границах расчетной области.

На границе, через которую жидкость поступает в расчетную область, обычно задается распределение скорости, направление потока, а также распределения полного давления и полной температуры (или числа Маха), а также распределения характеристик турбулентности.

При решении задачи в неограниченной области из-за отсутствия точных граничных условий, заменяющих условие на бесконечности для исходной задачи с неограниченной областью, постановка граничных условий реализуется приближенным способом.

При расчете стационарных течений на выходной границе, через которую жидкость покидает расчетную область, обычно выставляются мягкие граничные условия, выражающие собой условие о равенстве нулю производной по нормали к границе.

При моделировании нестационарных дозвуковых течений возмущения, дойдя до внешней границы, частично отражаются от них, искажая решение внутри расчетной области. Широкое применение находят неотражающие граничные условия.

Для скорости на стенке используются граничные условия прилипания и непротекания (жесткие граничные условия). Для температуры задается температура стенки. Для постановки граничных условий для характеристик турбулентности на стенке используется метод пристеночных функций [38].

Использование слабых граничных условий позволяет избежать применения метода пристеночных функций и связанных с ним проблем. Влияние стенки на поток учитывается в виде сеточных напряжений сдвига и дополнительной сеточной генерации турбулентности за счет отличия профиля касательной скорости от логарифмического распределения около стенки [10, 16].

На удаленных границах расчетной области задаются условия скольжения или условия невозмущенного течения.

Периодические граничные условия выставляются для всех искомых функций на противоположных границах расчетной области при расчете течений в области, обладающей свойством симметрии (повторяемости).

4.1.2.5. Методы дискретизации. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса используются метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов и спектральные методы.

Метод конечных разностей (Finite Difference Method, FDM) основан на замене производных, входящих в исходные уравнения, их дискретными (разностными) аналогами. Его достоинствами являются эффективность и простота реализации, а также наглядность процедуры дискретизации, дающая возможность построения схем высокого порядка точности (эти достоинства реализуются при использовании структурированных сеток). Расчеты проводятся либо на совмещенной, либо на разнесенной сетке (staggered grid), когда скорость и давление рассчитываются в смежных узлах [19, 38].

В методе конечных объемов (Finite Volume Method, FVM) используется интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса и энергии. Дискретный аналог балансовых соотношений, записанных для контрольного объема, получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и энергии, вычисленных по каким-либо квадратурным формулам. Метод конечных объемов пригоден для дискретизации уравнений сохранения как на структурированных, так и на неструктурированных сетках с различной формой ячеек. В качестве контрольного объема выбирается контрольный объем, совпадающий с ячейкой, или контрольный объем, центрированный относительно узла [14].

Метод конечных элементов (Finite Element Method, FEM) опирается на вариационную задачу о минимуме ошибки аппроксимации искомого решения базисными функциями, а не на исходные физические уравнения. Метод конечных элементов получил широкое распространение в механике деформируемого твердого тела. Отсутствие преимуществ перед методом конечных объемов и трудности обеспечения необходимой точности описания тонких пограничных слоев служат причинами относительно низкой популярности метода конечных элементов при решении задач механики жидкости и газа.

Для задач с достаточно гладким решением и мягкими граничными условиями для дискретизации уравнений Навье–Стокса находят применение спектральные методы (Spectral Method, SM), которые позволяют определить значения искомых функций более точно, чем локальные методы [40]. Важная роль граничных условий при построении спектральных методов привела к использованию псевдоспектральных подходов (Pseudo-Spectral Method, PSM). Использование полиномов Чебышева для определения точек коллокации приводит к мелкой вблизи границ и сравнительно грубой сетке внутри расчетной области, что удобно для моделирования течений при больших числах Рейнольдса.

Преимущество спектральных методов состоит в том, что высокая пространственная точность получается при сравнительно небольшом числе точек коллокации. Их основной недостаток связан с сильными ограничениями на шаг по времени при расчете стационарных или слабо меняющихся со временем течений [40]. При моделировании нестационарных течений, в которых для достижения необходимой точности требуются малые шаги по времени, спектральные методыстановятся конкурентноспособными с конечно-разностными и конечно-объемными методами (особенно для областей регулярной формы).

4.1.2.6. Дискретизация по времени. С точки зрения дискретизации по времени, разностные схемы делятся на явные, неявные и смешанные явно-неявные [19].

Явные схемы (explicit scheme) лучше согласованы с конечной скоростью распространения возмущений, характерной для гиперболических уравнений, ограничивая их перенос одним шагом сетки за один шаг по времени. Для дискретизации параболических уравнений, которые характеризуются мгновенной скоростью распространения возмущений, используются неявные схемы (implicit scheme), снимающие жесткие ограничения на шаг интегрирования по времени. В явно-неявной схеме (explicit/implicit scheme) для дискретизации конвективных потоков применяется явная схема, а для дискретизации диффузионных потоков — неявная схема.

Одна из проблем численного решения уравнений Навье–Стокса и построения разностных схем на неструктурированных сетках связана с необходимостью обеспечить положительность искомых функций. Условие положительности выполняется для схем Рунге–Кутты различного порядка [19] (при условии, что выполняется условие Куранта–Фридрихса–Леви, и все коэффициенты схемы являются неотрицательными).

Рост мощности современных многопроцессорных вычислительных систем делает оправданным использование простых явных конечно-разностных схем [15] (при этом реализация и распараллеливание вычислительной процедуры существенно упрощаются по сравнению со случаем неявных разностных схем).

4.1.2.7. Дискретизация по пространству. Различные версии метода конечных объемов различаются способом вычисления потоков (дискретизация по пространству) [7].

Численные схемы, используемые для дискретизации конвективных потоков, должны сохранять монотонность и сходиться к физически корректному решению. Условие сохранения монотонности решения связано с идеей невозможности появления ложных максимумов или минимумов (нефизических осцилляций, развивающихся со временем).

Нелинейные взаимодействия среди разрешимых масштабов и соответствующих им волновых чисел продуцируют волны с волновыми числами, бóльшими предельного волнового числа, которые могут

интерпретироваться численно (совмещенность). В турбулентном потоке данный эффект может интерпретироваться как ложный перенос энергии к малым волновым числам [4] (отрицательная турбулентная вязкость). Для того чтобы вызвать быстрое затухание волновых чисел, бóльших предельного волнового числа, и воспрепятствовать их добавлению к амплитудам, соответствующим меньшим волновым числам, вводится дополнительная диссипация.

Для получения монотонного решения применяется схема Годунова [43], предполагающая кусочно-постоянное распределение параметров течения на нижнем временно́м слое. В ней используется точное решение задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана)). Для экономии машинных ресурсов применяются также приближенные подходы [7, 19] (среди наиболее популярных следует отметить методы Роэ и Ошера).

В силу теоремы Годунова, не существует монотонных линейных разностных схем с порядком аппроксимации по пространству выше 1-го [40]. Принцип минимальных значений производных, используемый в схеме Колгана, позволяет повысить порядок схемы Годунова до 2-го по всем направлениям, за исключением направления интегрирования. Схема Колгана является неоднородной, но сохраняет свойство монотонности, позволяя уменьшить размывание контактных разрывов и слабых скачков уплотнения, а также достичь большей точности в областях непрерывного изменения решения.

Прогресс в направлении улучшения диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем, используемых для дискретизации конвективных потоков, связан с разработкой и реализацией разностных схем повышенной разрешающей способности (High Resolution Scheme, HRS). Общим во всех методах подобного класса является использование разнообразных монотонизирующих ограничителей потоков с переключателями, зависящими от локальных свойств решения [7, 11, 17].

Повышение точности конечно-разностных схем без потери их строгого теоретического обоснования достигается путем замены условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации [40] (Total Variation Diminishing, TVD). Для получения разностных схем, удовлетворяющих условию TVD, вводится ограничитель потока, зависящий от градиентов искомой функции. В зависимости от структуры ограничителя, разностные схемы условно разделяются на линейные и нелинейные [11].

Для обеспечения ограниченности численного решения разностные схемы должны удовлетворять критерию конвективной ограниченности (Convection Boundedness Criterion, CBC). Критерий CBC представляет собой необходимое и достаточное условие для обеспечения ограниченности численного решения в том случае, когда для дискретизации конвективных потоков на грани контрольного объема используется не более трех узлов против потока. Он находит подтверждение для

неявных расчетов стационарных течений, но не гарантирует получение сходящегося решения [11].

Для того чтобы гарантировать получение сходящегося решения, в разностных схемах используется универсальный ограничитель потока (Universal Limiter, ULTIMATE). Критерий ULTIMATE находит подтверждение для явных расчетов нестационарных течений и сводится к критерию CBC при малых числах Куранта [11].

Условия, выражаемые критериями CBC и ULTIMATE, оказываются более мягкими, чем условие TVD, но, как показывают многочисленные расчеты, позволяют получить монотонное и сходящееся решение [11].

В отличие от схем TVD, схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory) допускают осцилляцию полной вариации решения в пределах ошибки округления, но тем не менее являются квазимонотонными. Вблизи разрывов ENO-схемы переключаются на односторонние разности и тем самым не используют разрывные данные, которые вносят паразитные осцилляции. Они имеют равномерную точность и хорошо описывают острые и монотонные профили скачков.

Среди различных монотонизированных разностных схем повышенного порядка аппроксимации наиболее оптимальное соотношение между точностью, экономичностью, простотой и универсальностью имеет метод кусочно-параболической реконструкции [7] (Piecewise Parabolic Method, PPM), который считается наиболее перспективным для прямого численного моделирования газодинамической неустойчивости и турбулентности на современных многопроцессорных системах.

Вычислительная процедура, использующая в качестве базовой схемы схему Годунова или ее модификации, реализуются в виде следующей последовательности шагов.

1. Реконструкция решения в каждом контрольном объеме, экстраполяция неизвестных для нахождения состояния потока на его гранях по величинам, заданным в центре (reconstruction).

2. Решение задачи Римана (Riemann solver) для каждой грани контрольного объема с учетом локального направления потока (в направлении нормали к грани контрольного объема). Точное решение задачи Римана представляется достаточно затратным с вычислительной точки зрения (при этом происходит потеря информации о структуре распада разрыва в результате осреднения по ячейке), поэтому широкое применение находят приближенные подходы, например, методы Роэ и Ошера.

3. Реализация шага по времени (evolution).

В то время как дискретизация конвективных потоков проводится при помощи разностных схем повышенной разрешающей способности, способ дискретизации диффузионных потоков влияет, скорее, на техническую сторону реализации подхода и соответствующие численные схемы необязательно должны иметь повышенный порядок. Обычно для дискретизации вязких потоков используются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка (тем не менее, в вычислительной

практике находят применение и другие подходы, основанные на более высоком порядке точности).

В расчетах турбулентных течений более низкий порядок дискретизации вязких членов интерпретируется как неточность в представлении сил вязкости, что вполне допустимо, когда турбулентная вязкость рассчитывается при помощи некоторой приближенной модели.

4.1.2.8. Решение разностных уравнений. Решение системы разностных уравнений представляет собой один из наиболее важных и доминирующих моментов вычислительной процедуры с точки зрения затрат машинных ресурсов.

Сравнительная характеристика различных итерационных методов и ресурсов (время счета и память), необходимых для реализации последовательного и параллельного кода, приводится в табл. 4.2 в зависимости от размера матрицы n. Время выполнения оценивается как произведение числа итераций на стоимость одной итерации

$$\text{cost}_1 \simeq t_1 O\left(\frac{n}{p}\right) + t_2 + t_3 O\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right),$$

где n — число неизвестных; p — число процессоров; t_1 — время, затрачиваемое на одну операцию; t_2 — время задержки посылки сообщения; t_3 — время, необходимое для пересылки одного числа между процессорами.

Таблица 4.2. Сравнительная характеристика различных итерационных методов

Метод	Последовательный код	Параллельный код	Память	Число процессоров
Метод Якоби	n^2	n	n	n
Метод Гаусса–Зейделя (red/black)	n^2	n	n	n
Метод SOR (red/black)	$n^{3/2}$	$n^{1/2}$	n	n
Метод CG	$n^{3/2}$	$n^{1/2} \lg n$	n	n
LU-разложение (плотная матрица)	n^3	n	n^2	n^2
LU-разложение (ленточная матрица)	n^2	n	$n^{3/2}$	n
LU-разложение (разреженная матрица)	$n^{3/2}$	$n^{1/2}$	$n \lg n$	n
Метод FFT	$n \lg n$	$\lg n$	n	n
Многосеточный метод	n	$\lg^2 n$	n	n
Нижняя граница	n	$\lg n$	n	

Прямые методы (например, метод исключения Гаусса) предъявляют жесткие требования к быстродействию и памяти. Время вычислений оценивается как $O(n^3)$, а память, необходимая для хранения данных, как $O(n^2)$. Для итерационных методов время решения зависит от качества начального приближения, а требования к памяти значительно мягче и оцениваются как $O(n)$. Например, для методов Якоби и Гаусса–Зейделя, время счета оценивается как $O(k^2)$, где k — количество итераций.

Для увеличения скорости сходимости итерационного процесса используются различные методы предобусловливания [19, 40]. Их применение приводит к удорожанию вычислительной процедуры приблизительно на 50%. Более продуктивным оказывается использование многосеточного метода решения системы разностных уравнений.

4.1.2.9. Ускорение вычислений. При решении полных уравнений Навье–Стокса достаточно важной становится проблема сокращения затрат машинного времени. Данная проблема рассматривается с двух позиций — с точки зрения ускорения итерационного процесса и с точки зрения ускорения вычислений за счет эффективного использования ресурсов современных вычислительных систем.

Прогресс в ускорении сходимости итерационного процесса требует реализации и внедрения специальных вычислительных алгоритмов, обладающих достаточно сложной логикой счета [40]. Ускорение счета предполагает привлечения новых дорогостоящих вычислительных ресурсов и программного обеспечения, а также их своевременное обновление.

Среди итерационных методов решения систем разностных уравнений наибольший эффект ускорения сходимости позволяет получить многосеточный метод (multigrid method) [14, 175], а наиболее привлекательный способ ускорения счета состоит в использовании параллелизации или векторизации процесса вычислений [15].

Многосеточный метод сравнительно легко реализуется на структурированных сетках [175]. В случае неструктурированных сеток требуется построение последовательности неструктурированных сеток, позволяющих провести дискретизацию на различном уровне [14, 253]. Для последовательности неструктурированных сеток используются метод схлопывающихся узлов (Vertex Collapse Method) и метод схлопывающихся граней (Edge Collapse Method).

4.1.2.10. Параллелизация. Для решения задач механики жидкости и газа требуются высокое быстродействие, а также обработка и хранение большого объема информации, что предъявляет повышенные требования к оперативной памяти. Такие ресурсы имеются в распоряжении высокопроизводительных вычислительных систем или суперкомпьютеров (High Performance Computing).

Зависимость производительности вычислительных систем от времени их ввода в эксплуатацию, приводится на рис. 4.2, взятом из [276].

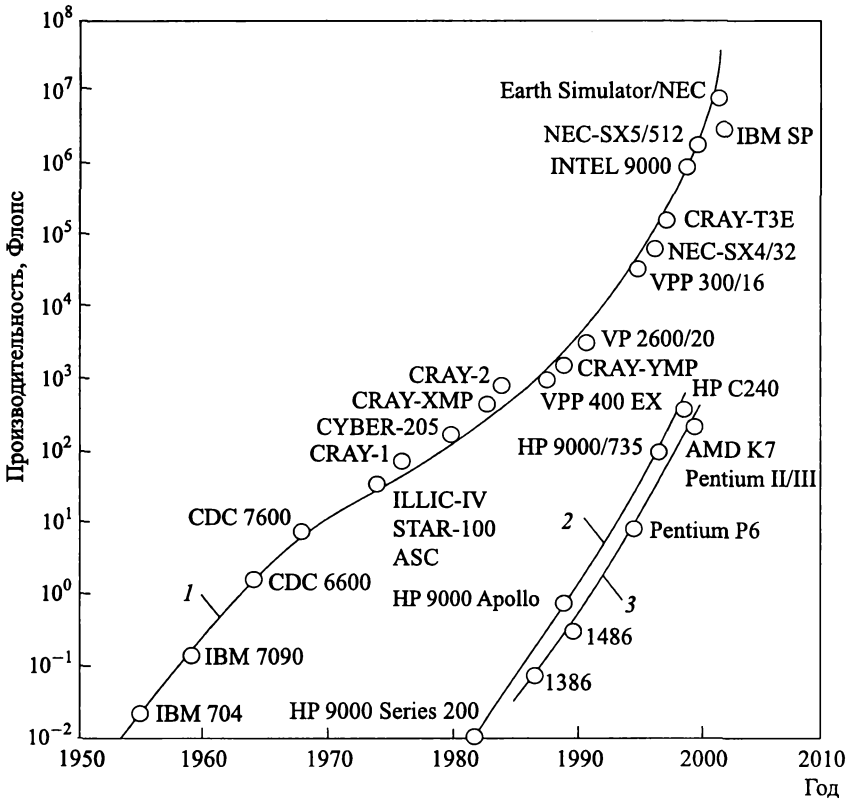


Рис. 4.2. Динамика увеличения производительности вычислительных систем различного класса (*1* — суперкомпьютеры; *2* — рабочие станции; *3* — персональные компьютеры)

Производительность современных суперкомпьютеров превышает 10 ТФлопс, а динамика ее роста является довольно оптимистичной. Сравнительно дешевые рабочие станции и персональные компьютеры достигли скорости в несколько сотен мегафлопс (их производительность увеличивается по зависимости, близкой к линейной в логарифмических координатах). Это делает реальными и доступными расчеты практических турбулентных течений с помощью современных подходов к описанию турбулентности. При этом на каждые 10^6 ячеек расчетной сетки требуется приблизительно 1 Гб оперативной памяти.

Перспективы численного моделирования турбулентных течений со стороны совершенствования вычислительных платформ выглядят достаточно привлекательными.

Подход к численному решению задач механики жидкости и газа при помощи современных вычислительных технологий и методов парал-

лельного программирования основан на геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, количество которых равняется числу процессоров, расчете каждым процессором своей подобласти и обмене данными между ними на каждом шаге по времени. Связь подобластей обычно осуществляется при помощи введения фиктивных ячеек (их количество зависит от шаблона разностной схемы), которые находятся за границами подобластей и не обрабатываются кодом [15]. Показатели производительности зависят от метода декомпозиции, способа распределения данных по процессорам, и реализации численных методов, применяемых для решения подзадач.

4.1.2.11. Средства реализации. Выбор средств реализации вычислительного алгоритма во многом определяет показатели производительности программного обеспечения, переносимость и возможности его последующего расширения.

Среди наиболее часто используемых языков программирования следует отметить Fortran (процедурный подход) и C++ (объектно-ориентированный подход). Использование Fortran объясняется возможностью использования мощных библиотек функций, а C++ — его универсальностью.

Немаловажным представляется вопрос о переносимости программного обеспечения с одной платформы на другую (например, с Windows на Unix). В основном, это касается графического интерфейса. Проблем с переносимостью расчетных модулей, как правило, не возникает.

Проведение вычислений на современных параллельных программных системах в пакетном режиме или режиме удаленного терминала делает нерациональным создание программного обеспечения с графическим интерфейсом и развитыми средствами визуализации. Для этих целей используются специализированные коммерческие или свободно распространяемые пакеты и открытые форматы данных.

Для сопряжения с коммерческими пакетами требуется знание соответствующих форматов данных и разработка специальных фильтров, осуществляющих трансляцию из одного формата в другой (или запись результатов в нужном формате данных).

Программа решения уравнений Навье–Стокса реализует только расчетные функции (консольное приложение). Для задания входных данных и параметров используется встроенный макроязык [18]. Такой подход позволяет добиться переносимости программных модулей и их независимости от конкретных особенности операционной системы.

Для создания параллельных приложений широкое применение находит интерфейс межпроцессорного взаимодействия (Message Passing Interface, MPI). Технология MPI предназначена для поддержки работы параллельных процессов в терминах передачи сообщений. Интерфейс MPI предоставляет единый механизм взаимодействия ветвей внутри параллельного приложения независимо от машинной архитектуры (однопроцессорные/многопроцессорные системы с общей/распределен-

ной памятью), взаимного расположения ветвей (на одном процессоре/на разных). Во многих случаях предпочтительно использовать программные средства более высокого уровня, чем MPI, облегчающие создание параллельного приложения.

4.1.2.12. Тестирование. Вычислительная процедура требует тестирования на широком диапазоне пространственных и временны́х масштабов путем решения совокупности задач модельного плана, для которых имеются надежные экспериментальные и расчетные данные.

4.1.3. Организация программного кода. Сложность математических моделей, необходимость построения многовариантных программных модулей, обслуживающих вычислительный эксперимент, а также существенный объем программного кода ставят вопрос организации его конфигурационных построений.

4.1.3.1. Функциональные подсистемы. Разработка универсальной программной среды подготовки данных, управления процессом расчета и визуализации результатов представляет достаточно сложную задачу.

В соответствии с функциональным назначением, в системе выделяется три основные подсистемы: подсистема подготовки данных, подсистема управления процессом счета, подсистема визуализации полученных результатов. Управление подсистемами и их связь между собой осуществляется путем обмена сообщениями с управляющей программой (приложением). Подсистемы включают в себя следующие компоненты (их взаимодействие поясняет рис. 4.3).

1. Подсистема подготовки данных и создание твердотельной модели. Импорт твердотельной модели и сетки из коммерческих пакетов.

1.1. Задание геометрии расчетной области. Информация о геометрии хранится отдельно от поля течения.

1.2. Построение сетки.

1.3. Задание граничных условий. Указываются допустимые типы граничных условий и данные, необходимые для задания каждого из этих типов. Привязка граничных условий к отдельным сеточным линиям и формирование диалога для задания данных на каждой границе производится на основе коммерческих сеточных генераторов.

1.4. Задание начальных условий. Начальные условия задаются либо аналитически, либо с использованием интерполяции табличных данных, либо при помощи считывания из файла.

1.5. Задание параметров, относящихся к физической постановке задачи и реализации вычислительного алгоритма.

2. Подсистема управления процессом счета. Возможны несколько вариантов управления:

— не допускается управление во время счета (управление производится через систему подготовки данных, задавая продолжительность счета и шаг вывода промежуточных результатов, которые накапливаются в файлах);



Рис. 4.3. Функциональные подсистемы и их взаимодействие

— частичное управление (предусматривается возможность наблюдения за изменением какого-либо параметра во времени);
— полное управление (приостановка счета и изменение управляющих параметров, сохранение текущего состояния с последующим рестартом, получение промежуточных результатов, выдача результатов при достижении заданного значения какого-либо параметра).

3. Подсистема визуализации результатов (графическое представление результатов в виде изолиний, векторных полей, графиков) и экспорт результатов в ряд форматов, поддерживаемых распространенными коммерческими пакетами.

С математической точки зрения, расчет течения жидкости или газа представляет собой решение начально-краевой задачи некоторым численным методом (рис. 4.4).

Специфика задач механики жидкости и газа подразумевает зависимость результатов от геометрии расчетной области, что накладывает на подсистему задания геометрии особые условия (параметрическое описание геометрических объектов и возможность их легкого редактирования). Для задач разной размерности этапы создания геометрии и построения сетки различаются, что осложняет реализацию системы в общем случае.

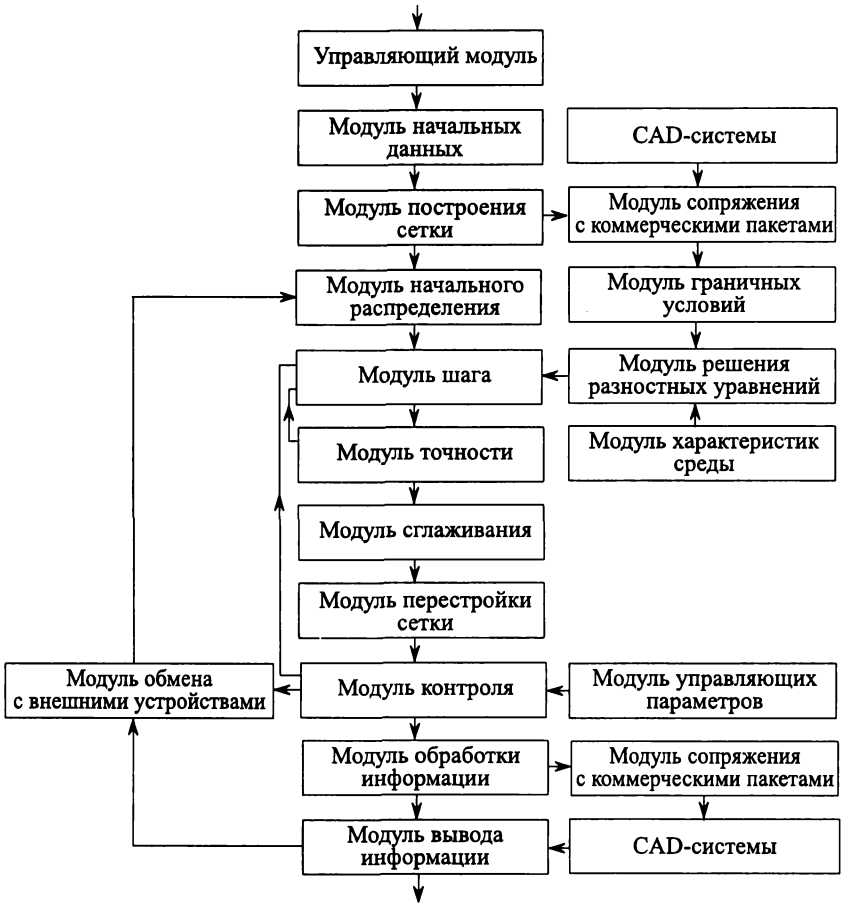


Рис. 4.4. Структурно-функциональная схема решения задачи

Создание твердотельной модели и построение сетки, задание типа граничных условий и обработка результатов производится на локальном компьютере. Для этого используются коммерческие системы пре- и пост-процессорной обработки данных.

Расчетная сетка выгружается в текстовом формате. Препроцессор считывает файл сетки и формирует файл статистики, содержащий необходимую информацию о количестве и размерах векторов, которые выделяются в памяти на расчетном этапе.

Расчетный модуль считывает файл статистики, файл, содержащий граничные, начальные условия и физические параметры среды. Выполняется расчет, и расчетные данные выгружаются в файл для последующей обработки в системе визуализации. Память выделяется на этапе загрузки данных, и итерационный расчет выполняется без

перевыделения памяти. В этом случае удается практически избежать дефрагментации оперативной памяти (указатели адресов в памяти располагаются упорядочено). Достигаются эффективное использование памяти и надежность работы расчетного модуля.

4.1.3.2. Программные и технические средства. Программный код реализуется на языках программирования Fortran и C++. Используется модель программирования SPMD (Single Program and Multiple Data), в которой параллельно исполняется несколько копий одной программы на нескольких процессорах. Поддерживается одна версия программного кода, которая не зависит от числа процессоров.

Вопрос построения сетки отделяется от проблемы дискретизации уравнений Навье–Стокса. Сетка (структурированная или неструктурированная) считается заданной, в частности, построенной при помощи одного из коммерческих сеточных генераторов, таких как Gambit или Ansys ICEM CFD. Представление и хранение координат узлов сетки в виде структуры данных (массива) лежит в плоскости программной реализации, и не рассматривается.

Разработанные программные средства используют трансляцию сетки из формата сеточного генератора в формат общедоступной библиотеки ADF (Advanced Data Format), которая является частью библиотеки CGNS (CFD General Notation System). Формат CGNS поддерживается многими вычислительными пакетами (соответствующая опция имеется, например, в пакете Fluent). Для генерации файлов объемом, превышающим 2 Гб (максимальный размер файла ограничивается 4 Гб, но максимальный размер указателя не превышает 2 Гб), что необходимо для проведения расчетов с использованием полной геометрической модели, на системе с 32-разрядной архитектурой используется расширенная версия библиотеки CGNS LFS (Large File System), разработанная корпорацией Роллс–Ройс (Rolls–Royce plc) и Университетом Суррея (University of Surrey). Размер фала в 2 Гб приблизительно соответствует неструктурированной сетке, содержащей $7 \cdot 10^6$ шестигранных ячеек.

Для визуализации результатов используются коммерческие пакеты Tecplot и FieldView. Число поддерживаемых форматов данных расширяется за счет реализации и подключения соответствующих фильтров. Визуализация результатов расчетов, сохраненных в формате ADF, проводится при помощи библиотеки VISUAL 3, разработанной в Массачусетском технологическом институте (Massachusetts Institute of Technology, MIT). Она использует X и OpenGL (Open Graphics Library) библиотеки и предназначена для визуализации результатов, полученных на неструктурированных сетках.

Для распараллеливания вычислительной процедуры используется библиотека OPlus (Oxford Parallel Library for Unstructured Solvers), реализованная на языке Fortran 77 в вычислительной лаборатории университета Оксфорда (Oxford University Computing Laboratory) для

платформ Win32, Linux, SGI, AIX. К достоинствам библиотеки OPlus относятся использование обобщенных структур данных (в качестве элемента данных рассматриваются грани и ячейки, которые имеют различный тип — шестигранники, призмы, параллелепипеды, тетраэдры), производительность (посылка сообщений происходит только при модификации данных, а для уменьшении задержек при посылках сообщений данные объединяются в пакеты), переносимость (для посылки сообщений используются функции MPI).

Операции над множествами применяются в любом порядке без влияния на конечный результат, что ограничивает использование библиотеки OPlus для некоторых численных алгоритмов (например, метода Гаусса–Зейделя). Тем не менее, многие современные вычислительные алгоритмы удовлетворяют этому ограничению. Множества и указатели декларируются в начале исполняемой программы и не изменяются в дальнейшем, что не позволяет провести динамическое изменение сетки. В то же время, такой подход делает алгоритм независимым от порядка циклов и числа разбиений.

Функции библиотеки OPlus делятся на функции управления процессами, функции инициализации указателей, функции управления вводом/выводом, функции управления вводом/выводом в файлы и функции управлениями циклами.

Расчетная область разбивается на некоторое число подобластей, каждая из которых обрабатывается отдельным процессором. Каждый элемент множества и связанные с ним данные принадлежат уникальному процессу, а другие процессы при необходимости могут иметь копии этих данных. Изменение данных одним процессом (например, данных в ячейке) может привести к изменению данных, относящихся к другому процессу (например, данных в узлах). В этом случае операции проводятся над всеми разбиениями.

Использование библиотеки OPlus позволяет запустить программу как в последовательном режиме без вызова функций передачи сообщений (что удобно, например, для отладки кода), так и в параллельном режиме (парадигма master-slave, SPMD-концепция). Последовательная версия библиотеки содержит функции с теми же аргументами, что и ее параллельная версия, но которые не выполняют действий по передаче сообщений (пустое тело функции).

4.1.3.3. Проведение расчетов. Вычисления производятся в режиме удаленного терминала на кластере и суперкомпьютере.

Кластер компании Cluster Vision Ltd расположен в Университете Суррея (University of Surrey, United Kingdom). Вычислительные модули кластера связаны между собой высокоскоростной сетью Myrinet (пропускная способность составляет 1 Гбит/с) и сетью Fast Ethernet (пропускная способность составляет 100 Мбит/с). Сеть Myrinet предназначена для высокоскоростного обмена между модулями в ходе вычислений, а сеть Fast Ethernet — для начальной загрузки программ

и данных в модуль, передачи служебной информации о ходе вычислительного процесса и соединения решающего поля с управляющим узлом и дисковым массивом.

Суперкомпьютерный центр находится в Центральной лаборатории совета по научным исследованиям (Central Laboratory for the Research Councils, CLRC) в Daresbury Laboratory (Warrington, United Kingdom) и создан в результате проекта HPCx (данные приводятся на 2003 год). Система поддерживается HPCx-консорциумом (UoE HPCx Ltd), в который входят университет Эдинбурга (University of Edinburgh), Центральная лаборатория совета по научным исследованиям (Central Laboratory for the Research Councils, CLRC) и компания IBM. Учебно-методическую поддержку осуществляет компьютерный центр университета Эдинбурга (Edinburgh Parallel Computer Center, EPCC).

Суперкомпьютер IBM SP/1600 (рис. 4.2) состоит из 40 SMP-узлов pSeries 690 Regatta, каждый из которых содержит 32 процессора Power 4+ с 64-разрядной архитектурой и тактовой частотой 1,7 ГГц, обеспечивая теоретическую пиковую производительность 6,66 ТФлопс. Для оптимизации передачи данных между фреймами каждый из них разделяется на 4 узла по 8 процессоров (Logical Partitions, LPAR). С точки зрения программирования, система представляет собой 160 узлов SMP-типа по 8 процессоров каждый.

4.1.3.4. Тестирование. Результаты тестирования вычислительной процедуры на ряде модельных задач газовой динамики и задач, связанных с расчетом внутренних турбулентных течений, а также сведения по ускорению и производительности программного кода приводятся в работах [10, 11, 14–19].

4.2. Основные уравнения

В консервативных переменных уравнение, описывающее нестационарное трехмерное течение вязкого сжимаемого газа, записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q) = H(Q, \nabla Q). \tag{4.1}$$

Здесь $Q(\mathbf{x}, t)$, $F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)$, $H(Q, \nabla Q)$ представляют собой вектор консервативных переменных в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t, вектор потока через поверхность, ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\mathbf{n}$, и источниковый член соответственно. Источниковый член учитывает, в частности, неинерциальность системы отсчета (влияние кориолисовой и центробежной силы).

Уравнение (4.1) дополняется уравнением состояния идеального газа. Уравнение, записанное в виде (4.1), пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (4.1) замыкается уравнениями модели

турбулентности, а вместо молекулярных коэффициентов переноса используются их эффективные значения.

Для нормальной скорости на твердой стенке используется граничное условие непротекания ($v_n = 0$), а для касательной — условие прилипания ($v_\tau = 0$). Имеются разнообразные граничные условия, выставляемые для температуры на стенке, а также граничные условия на входной и выходной границах расчетной области. Однако для дискретизации уравнений Навье–Стокса их тип не является принципиальным.

Учитывая расщепление вектора потока на невязкую и вязкую составляющие

$$\underbrace{F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)}_{\text{полный поток}} = \underbrace{F^I(\mathbf{n}, Q)}_{\text{невязкий поток}} + \underbrace{F^V(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)}_{\text{вязкий поток}},$$

уравнение (4.1) переписывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \Big[F^I(\mathbf{n}, Q) + F^V(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)\Big] = H(Q, \nabla Q). \tag{4.2}$$

Введем вектор невязки

$$R(Q) = \nabla \cdot F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q) - H(Q, \nabla Q).$$

Тогда уравнение (4.2) примет следующий вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + R(Q) = 0. \tag{4.3}$$

Для дискретизации уравнений, записанных в виде (4.1), (4.2) или (4.3), используется метод конечных объемов на комбинированной сетке.

Дискретизация конвективных потоков проводится при помощи схемы MUSCL [178] или метода кусочно-параболической реконструкции и схемы Чакраварти–Ошера [98], а для дискретизация диффузионных потоков — при помощи центрированных конечных разностей 2-го порядка.

Источниковые члены в уравнениях модели турбулентности (при решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса) дискретизируются таким образом, чтобы гарантировать ограниченность искомых функций в соответствии с их физическим смыслом [14].

4.3. Метод конечных объемов

Интегрируя уравнение (4.1) по контрольному объему V_i с границей ∂V_i, ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$, и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_i} Q\, d\Omega + \oint\limits_{\partial V_i} \Big[F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q) - (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n})Q\Big] dS = \int\limits_{V_i} H(Q, \nabla Q)\, d\Omega, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{v}_b$ — скорость перемещения границы ∂V_i контрольного объема V_i. Предполагая, что сеточная величина, определенная в центре контрольного объема, представляет собой среднее интегральное значение соответствующей непрерывно распределенной величины

$$Q_i = \frac{1}{V_i} \int\limits_{V_i} Q \, d\Omega,$$

преобразуем уравнение (4.4) к виду

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + R_i(Q) = 0. \tag{4.5}$$

Вектор невязки в уравнении (4.5) находится из соотношения

$$R_i(Q) = \frac{1}{V_i} \left\{ \oint\limits_{\partial V_i} \left[F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q) - (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}) Q \right] dS - \int\limits_{V_i} H(Q, \nabla Q) \, d\Omega \right\}. \tag{4.6}$$

Невязки, связанные с дискретизацией невязких и вязких потоков, имеют следующий вид

$$R_i^I = \frac{1}{V_i} \oint\limits_{\partial V_i} F^I(\mathbf{n}, Q) \, d\Omega;$$

$$R_i^V = \frac{1}{V_i} \oint\limits_{\partial V_i} F^V(\mathbf{n}, Q, \nabla Q) \, d\Omega.$$

При дискретизации уравнений Навье–Стокса по методу конечных объемов используется контрольный объем, совпадающий с ячейкой сетки, или контрольный объем, центрированный относительно узла сетки. Несмотря на то, что выбор контрольного объема, центрированного относительно узла сетки (рис. 4.5, *а*), требует примерно в 6 раз большего объема памяти по сравнению со случаем, когда контрольный объем совпадает с ячейкой, он позволяет получить более точные результаты в пограничном слое за счет более мелкого шага сетки в пристеночной области. Вблизи стенки используется половинный контрольный объем (рис. 4.5, *б*).

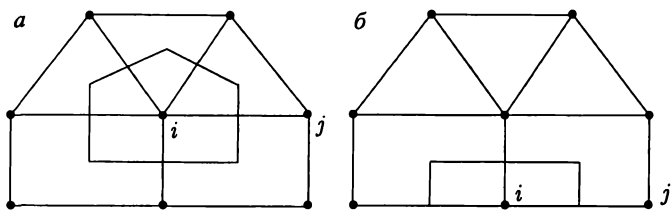


Рис. 4.5. Внутренний (фрагмент *а*) и граничный (фрагмент *б*) контрольные объемы

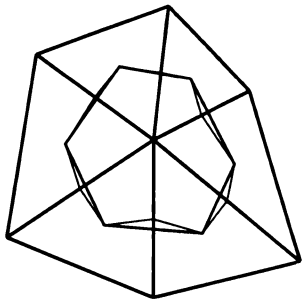


Рис. 4.6. Среднемедианный контрольный объем

Частным случаем объема, центрированного относительно узла сетки, является среднемедианный контрольным объем (median dual volume), показанный на рис. 4.6. Среднемедианный контрольный объем V_i, связанный с узлом $i = 1, \ldots, N$ сетки, где N — число узлов, строится таким образом, что геометрические центры ячеек сетки с вершиной в узле i соединяются друг с другом через середины разделяющих их граней [64]. Грань контрольного объема, соединяющая узлы сетки i и j, обозначается через (i, j).

Для внутренних узлов сетки имеют место следующие соотношения для невязок, связанных с дискретизацией конвективных и диффузионных потоков

$$R_i^I = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in E_i} F_{ij}^I s_{ij}; \qquad R_i^V = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in E_i} F_{ij}^V s_{ij}.$$

Весовые множители (площади граней) внутренних граней контрольного объема являются антисимметричными $s_{ij} = -s_{ji}$ для $\forall j \in E_i$ (обход граней контрольного объема производится по часовой стрелке), а весовые множители его граничных граней — симметричными $s_{ik} = s_{ki}$ для $\forall k \in B_i$ [64]. При этом имеет место следующее соотношение [191, 248]

$$\sum_{j \in E_i} \mathbf{n}_{ij} s_{ij} + \sum_{k \in B_i} \mathbf{n}_{ik} s_{ik} = 0. \tag{4.7}$$

Здесь E_i — множество внутренних граней, связанных с узлом i; B_i — множество граничных граней, связанных с узлом i; $\mathbf{n}_{ij}$ — внешняя единичная нормаль, задающая ориентацию грани (i, j); s_{ij} — площадь грани, соединяющей узлы i и j; $\mathbf{n}_{ik}$ — внешняя единичная нормаль к граничной грани (i, k); s_{ik} — площадь граничной грани, соединяющей узлы i и k.

В квазитрехмерной формулировке (при расчете плоских течений, когда в направлении оси z выставляются условия повторения течения) веса внутренних граней контрольного объема находятся из соотноше-

ния $h_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}$, где h_{ij} — высота трубки тока. При изменении высоты трубки тока разностная схема становится неконсервативной, поскольку

$$\sum_{j\in E_i} h_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij} \neq 0.$$

Для сохранения консервативности узлы сетки в плоскости, нормальной к направлению течения, декларируются как граничные узлы (скрытая группа узлов). Веса граничных граней, связанных с узлами этой псевдогруппы узлов, вычисляются по формуле

$$\sum_{k\in B_i} \mathbf{n}_{ik}s_{ik} + \sum_{j\in E_i} h_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij},$$

в которой слагаемое слева представляет собой стандартный вес грани и равняется нулю для внутренних узлов.

4.4. Расчет потоков через грани контрольного объема

Интеграл по границе контрольного объема вычисляется как сумма произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объема на площади его граней. Интеграл от потока в соотношении (4.6) разделяется на два слагаемых, связанных с внутренними и граничными гранями контрольного объема

$$\int_{\partial V_i} F(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)\, ds = \sum_{j\in E_i} F(\mathbf{n}_{ij}, Q, \nabla Q)|_{\mathbf{x}_{ij}}\, \mathbf{n}_{ij}s_{ij} + \\ + \sum_{k\in B_i} F(\mathbf{n}_{ik}, Q, \nabla Q)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ik}}\, \mathbf{n}_{ik}s_{ik}. \quad (4.8)$$

С учетом расщепления (4.8) и теоремы о среднем соотношение (4.6) примет следующий дискретный вид

$$R_i = \frac{1}{V_i}\Bigg(\underbrace{\sum_{j\in E_i} F_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}}_{\text{внутренние грани}} + \underbrace{\sum_{k\in B_i} F_{ik}\mathbf{n}_{ik}s_{ik}}_{\text{граничные грани}} - \underbrace{H_iV_i}_{\text{источник}} \Bigg). \quad (4.9)$$

Здесь F_{ij} — поток через внутреннюю грань (i,j), ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\mathbf{n}_{ij}$; F_{ik} — поток через граничную грань (i,k), ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\mathbf{n}_{ik}$, s_{ij} и s_{ik} — площади внутренней (i,j) и граничной (i,k) граней контрольного объема.

4.4.1. Внутренние грани. Поток через внутреннюю грань (i,j) контрольного объема вычисляется в серединной точке грани

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$$

как полусумма соответствующих узловых значений, умноженных на площадь грани

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(F_i + F_j)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij}.$$

Суммируя по всем внутренним граням (для $\forall j \in E_i$), получим

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij}.$$

С учетом свойства антисимметричности весовых множителей внутренних граней для замкнутого контрольного объема

$$\sum_{j\in E_i}\mathbf{n}_{ij}s_{ij} = 0,$$

которое следует из соотношения (4.7), имеем

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij} - F_i\sum_{j\in E_i}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}.$$

Перепишем приведенное соотношение в виде

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_j - F_i)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij}.$$

Учитывая, что $s_{ij} = -s_{ji}$ для $\forall j \in E_i$, вклад каждой грани (i,j) контрольного объема представляется формулой

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(F_j - F_i)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij}.$$

4.4.2. Граничные грани. Поток через граничную грань (i,k) контрольного объема рассчитывается в точке

$$\mathbf{x}_{ik} = \frac{1}{2D+2}\sum_{j\in G_k}\Big[1 + (D+2)\delta_{jk}\Big]\mathbf{x}_j,$$

где D — размерность задачи; G_k — множество узлов в граничной ячейке k. Вклад грани, лежащей на границе расчетной области, записывается отдельно. Учитывая свойство симметричности весовых множителей внутренних граней и свойство антисимметричности весовых множителей внутренних граней контрольного объема, описываемое соотношением (4.7), имеем

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij} + F_{ik}\mathbf{n}_{ik}s_{ik} - F_{ik}\left(\mathbf{n}_{ik}s_{ik} + \sum_{j\in E_i}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}\right).$$

Для расчета потоков через грани граничного контрольного объема получим такое же соотношение, что и для его внутренних граней

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j \in E_i} (F_j - F_i)\, \mathbf{n}_{ij} s_{ij}.$$

Использование одинаковых выражений для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов обеспечивает более простую программную реализацию метода конечных объемов.

4.5. Невязкие потоки

Из соотношений (4.6) и (4.9) следует, что невязка, связанная с дискретизацией конвективных потоков, представляется в следующем виде

$$R_i^I(Q) = \frac{1}{V_i} \oint\limits_{\partial V_i} F^I(\mathbf{n}, Q)\, dS = \frac{1}{V_i} \left(\sum_{j \in E_i} F_{ij}^I \mathbf{n}_{ij} s_{ij} + \sum_{k \in B_i} F_{ik}^I \mathbf{n}_{ik} s_{ik} \right). \tag{4.10}$$

Для дискретизации невязких потоков используются:

1. Модифицированный вариант схемы MUSCL [178], которая представляет собой комбинацию центрированных конечных разностей 2-го (схема CDS-2) и 4-го порядка, для переключения между которыми служит ограничитель потока [278], построенный на основе характеристических переменных.

2. Метод кусочно-параболической реконструкции (Piecewise Parabolic Method, PPM) и схема Чакраварти–Ошера [98], имеющая наиболее оптимальное соотношение между точностью, экономичностью, простотой и универсальностью среди различных монотонизированных разностных схем повышенного порядка [7].

4.5.1. Схема MUSCL. Для повышения порядка точности по пространственным переменным без потери монотонности используется монотонная противопоточная схема для законов сохранения (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws, MUSCL) с ограничителем потока для подавления нефизических осцилляций решения.

Частный случай. Рассмотрим модельное уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{4.11}$$

После линеаризации уравнение (4.11) примет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{4.12}$$

где $A = \partial F / \partial Q$ представляет собой якобиан.

Дискретизируя уравнение (4.12), получим

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + A\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{4.13}$$

При $A < 0$ разностная схема (4.13) становится неустойчивой. Для предотвращения неустойчивости представим матрицу A в виде суммы $A = A^+ + A^-$, где

$$A^+ = \max\{A, 0\} = \frac{1}{2}(A + |A|), \quad A^- = \min\{A, 0\} = \frac{1}{2}(A - |A|).$$

Все собственные числа матрицы A^+ являются положительными, а все собственные числа матрицы A^- — отрицательными.

После подстановки в уравнение (4.13) получим

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\Big[\underbrace{A^+\left(Q_j^n - Q_{j-1}^n\right)}_{A>0} + \underbrace{A^-\left(Q_{j+1}^n - Q_j^n\right)}_{A<0}\Big] = 0. \tag{4.14}$$

Из соотношения (4.14) следует, что

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \underbrace{\frac{A\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n\right)}_{\text{CDS-2}} + \underbrace{\frac{|A|\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n\right)}_{\text{диссипативный член 2-го порядка}}. \tag{4.15}$$

Соотношение (4.15) переписывается в виде

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right). \tag{4.16}$$

Потоки через грани контрольного объема в (4.16) находятся из соотношений

$$F_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}\Big[A\left(Q_j^n + Q_{j-1}^n\right) - |A|\left(Q_j^n - Q_{j-1}^n\right)\Big];$$

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\Big[A\left(Q_{j+1}^n + Q_j^n\right) - |A|\left(Q_{j+1}^n - Q_j^n\right)\Big].$$

Общий случай. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F(Q) = 0. \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) учитывает только конвективный перенос и является модельной формой уравнения (4.1). Линеаризуя уравнение (4.17), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A\nabla Q = 0. \tag{4.18}$$

Якобиан в уравнении (4.18) находится из соотношения

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{\partial F_x}{\partial Q} + \frac{\partial F_y}{\partial Q} + \frac{\partial F_z}{\partial Q}.$$

Как и в частном случае, потоки представляются в виде

$$F(Q_L, Q_R) = F(Q_L) + \Delta F^-, \quad \Delta F^- = A^- \Delta Q;$$
$$F(Q_L, Q_R) = F(Q_R) - \Delta F^+, \quad \Delta F^+ = A^+ \Delta Q.$$

Складывая приведенные соотношения, получим

$$F(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2}\Big[F(Q_L) + F(Q_R) - \big(\Delta F^+ - \Delta F^-\big)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[F(Q_L) + F(Q_R) - |A|\,(Q_R - Q_L)\Big].$$

Индексы L и R соответствуют ячейкам, находящимся слева и справа от грани контрольного объема.

Неструктурированная сетка. Схема MUSCL для уравнения (4.18) записывается в виде

$$F_{ij}^I = \frac{1}{2}\Big[F_{ij}^I(Q^+) + F_{ij}^I(Q^-) - |A_{ij}|\,(Q^+ - Q^-)\Big]. \tag{4.19}$$

В случае неструктурированной сетки вместо узлов j и $j+1$ рассматриваются узлы i и j каждой грани (i,j) контрольного объема. Вектора Q^- и Q^+ соответствуют потокам F^- и F^+, у которых якобианы имеют соответственно неположительные и неотрицательные собственные значения. Поскольку построение векторов Q^+ и Q^- представляется достаточно затратным с вычислительной точки зрения, вместо (4.19) используется выражение

$$F_{ij}^I = \frac{1}{2}\Big[F_{ij}^I(Q_j) + F_{ij}^I(Q_i) - |A_{ij}|\,(Q^+ - Q^-)\Big]. \tag{4.20}$$

Соотношение (4.20) представляет собой комбинацию центральной разностной производной 2-го порядка и диссипативного члена. Диссипативное слагаемое представляется в виде

$$|A_{ij}|\,(Q^+ - Q^-) = \frac{1}{2}\,(1-\varkappa)\,|A_{ij}| \times$$
$$\times \left[\left(\frac{1}{2}\,Q_{j+} - Q_j + \frac{1}{2}\,Q_i\right) - \left(\frac{1}{2}\,Q_j - Q_i + \frac{1}{2}\,Q_{i-}\right)\right], \tag{4.21}$$

где $\varkappa \in [0,1]$. Вектора Q_{j+}, Q_j, Q_i, Q_{i-} соответствуют точкам $\mathbf{x}_{j+}$, $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i-}$, лежащим на равном расстоянии друг от друга.

Соотношения (4.20) и (4.21) дают следующую разностную схему для расчета потока

$$F_{ij}^I = \frac{1}{2}\Big\{\underbrace{\Big[F_{ij}^I(Q_j) + F_{ij}^I(Q_i)\Big]}_{\text{невязкий поток}} - \underbrace{\frac{1}{2}\,(1-\varkappa)\,|A_{ij}|\,\Big[L_j(Q) - L_i(Q)\Big]}_{\text{диссипативный член}}\Big\}, \tag{4.22}$$

где $L(Q)$ — псевдолапласиан. Для сохранения монотонности решения в схему (4.22) вводится ограничитель потока [278]. После линеаризации потоков получим следующее соотношение

$$F_{ij}^I = \frac{1}{2}\Bigg\{\underbrace{\left[A_{ij}Q_j + A_{ij}Q_i\right]}_{\text{невязкий поток}} - \underbrace{|A_{ij}|\left[\frac{1}{3}(1-\varphi)\underbrace{\left(\widehat{L}_j^*(Q) - \widehat{L}_i^*(Q)\right)}_{\text{4-й порядок}} + \varphi\underbrace{\left(Q_j - Q_i\right)}_{\text{2-й порядок}}\right]}_{\text{диссипативный член}}\Bigg\}, \quad (4.23)$$

где $\widehat{L}^*(Q)$ — модифицированный псевдолапласиан. Полагается, что $\varkappa = 1/3$. Соотношение (4.23) представляет собой комбинацию конечных разностей 2-го и 4-го порядка точности. Для переключения между ними служит функция (сглаживатель, smoother), зависящая от распределения статического давления [130]

$$\varphi = \min\left\{\varepsilon\left|\frac{p_j - p_i}{p_j + p_i}\right|^2, 1\right\},$$

где $\varepsilon = 8$. Для существенно неустойчивых течений сглаживатель потока умножается на коэффициент, зависящий от вихря скорости [144]

$$\phi = \frac{(\partial v_i/\partial x_i)^2}{(\partial v_i/\partial x_i)^2 + \omega_i\omega_i + \delta},$$

Малая величина δ предотвращает неопределенность.

Приведенный сглаживатель потока используется для моделирования внутренних течений. Для решения внешних задач газовой динамики используется сглаживатель потока, зависящий от распределения локального числа Маха.

Роль дополнительного диссипативного члена в соотношениях (4.22) и (4.23) заключается в демпфировании высокочастотных гармоник решения.

На твердой стенке, вследствие условия непротекания, $F_{ik}^I = 0$ для $\forall k \in B_i$. На входной границе расчетной области полагается

$$F_{ik}^I = \frac{1}{2}\left[F_k^I(Q_k) + F_k^I(Q_\infty) - |A_k|(Q_k - Q_\infty)\right],$$

где Q_∞ — вектор консервативных переменных на бесконечности.

Матрица A представляется в виде $A = R|\Lambda|L$, где Λ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел невязкого якобиана, а R и L — матрицы, составленные из его правых и левых собственных векторов ($L = R^{-1}$).

Расчет псевдолапласиана. Псевдолапласиан представляет собой обобщение центрально-разностной производной 2-го порядка на неструктурированную сетку [190]

$$L_i(Q) = \frac{1}{|E_i|} \sum_{j \in E_i} (Q_j - Q_i), \tag{4.24}$$

где $|E_i|$ — число элементов множества E_i.

Оценка на равномерной сетке с шагом h показывает, что

$$L_i(Q) \sim O(h^2)\, \nabla^2 Q\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i},$$

поэтому диссипативный член в (4.22) имеет порядок $O(h^3)$. После подстановки в соотношение (4.23) и деления на объем в (4.9), получается погрешность порядка $O(h^2)$.

Разложение в ряд Тэйлора в окрестности точки $\mathbf{x}_i$ дает

$$L_i(Q) = L_i(\mathbf{x})\, \nabla Q\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + O(h^2),$$

где $L_i(\mathbf{x}) = \{L_i x, L_i y, L_i z\}'$. Следовательно, на неравномерной сетке схема не имеет 2-го порядка точности. В случае, если вектор консервативных переменных Q является линейной функцией пространственных координат, то $L_i(Q) \neq 0$. Указанные обстоятельства приводят к потере точности решения, в связи с чем псевдолапласиан переопределяется следующим образом [128]

$$L_i^*(Q) = L_i(Q) - \nabla Q_i L_i(\mathbf{x}). \tag{4.25}$$

Если $Q = a\mathbf{x} + c$, то $L_i(Q) = aL_i(\mathbf{x})$, $\nabla Q = a$, поэтому $L_i^*(Q) = 0$. Вместе с тем, представление псевдолапласиана в виде (4.25) допускает потерю устойчивости численного решения и дает неточные результаты на сильно растянутых сетках, используемых для моделирования течений в пограничном слое [130] (в пограничном слое отношение шагов сетки вдоль стенки и по нормали к ней может достигать нескольких тысяч). Для обеспечения устойчивости решения вводится оператор масштабирования

$$\widehat{L}_i(Q) = \left(\sum_{j \in E_i} \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \right)^{-1} \sum_{j \in E_i} \frac{Q_j - Q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|};$$

$$\widehat{L}_i(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j \in E_i} \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \right)^{-1} \sum_{j \in E_i} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}.$$

После этого модифицированный псевдолапласиан находится из соотношения

$$\widehat{L}_i^*(Q) = \widehat{L}_i(Q) - \nabla Q_i\, \widehat{L}_i(\mathbf{x}). \tag{4.26}$$

Псевдолапласиан в виде (4.26) дает ноль на линейной функции и позволяет обеспечить точные результаты на сильно растянутой сетке.

Недостаток представления псевдолапласиана в виде (4.26) связан с анизотропным масштабированием, что приводит к демпфированию высокочастотных гармоник только в направлении наивысшего сеточного разрешения (поперек пограничного слоя).

Расчет градиента. Рассмотрим контрольный объем $abcde$, связанный с узлом i неструктурированной сетки (рис. 4.7). С учетом того, что $Q_i = \text{const}$ в пределах контрольного объема и $\nabla Q_i = 0$, используя формулы Грина и теорему Стокса, получим

$$\nabla Q = \frac{1}{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} \nabla Q\, d\omega - \underbrace{\int\limits_{\Omega} \nabla Q_i\, d\omega}_{=0}\right) = \frac{1}{\Omega}\left(\oint\limits_{L} Q\, dl - \underbrace{\oint\limits_{L} Q_i\, dl}_{=0}\right). \qquad (4.27)$$

Здесь Ω — расширенный контрольный объем 12345, участвующий в вычислении градиента; L — площадь граней расширенного контрольного объема; V — исходный контрольный объем $abcde$; S — площадь граней контрольного объема.

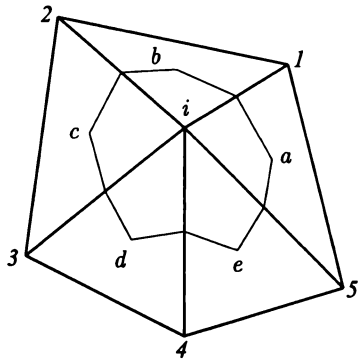


Рис. 4.7. Вычисление градиента

Интегралы, входящие в соотношение (4.27), представляются в виде

$$\oint\limits_{L} Q\, dl = \sum_{1,2,3,4,5} \frac{Q_i + Q_j}{2}\, \mathbf{n}_{ij}, \quad \oint\limits_{L} Q_i\, dl = Q_i L.$$

При этом имеют место соотношения

$$S = S_{ab} + S_{bc} + S_{cd} + S_{de} + S_{ea};$$
$$L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} + L_{51} = 3 \times S;$$
$$\Omega = 3 \times V.$$

Нормали к граням контрольного объема находятся из соотношений

$$\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{n}_{51} + \mathbf{n}_{12}, \quad \mathbf{n}_{bc} = \mathbf{n}_{12} + \mathbf{n}_{23}, \quad \mathbf{n}_{cd} = \mathbf{n}_{23} + \mathbf{n}_{34},$$

$$\mathbf{n}_{de} = \mathbf{n}_{34} + \mathbf{n}_{45}, \quad \mathbf{n}_{ea} = \mathbf{n}_{45} + \mathbf{n}_{51}.$$

Используя формулу Грина, получим

$$(\nabla Q)_i = \frac{1}{V}\left[\sum_{j\in E_i} \frac{1}{2}(Q_i + Q_j)\,\mathbf{n}_{ij} s_{ij} + \sum_{k\in B_i} Q_i \mathbf{n}_{ik} s_{ik}\right].$$

С учетом свойства симметричности и антисимметричности весовых множителей, описываемого соотношением (4.7), запишем

$$(\nabla Q)_i = \frac{1}{V}\left[\sum_{j\in E_i} \frac{1}{2}(Q_j - Q_i)\,\mathbf{n}_{ij} s_{ij}\right]. \tag{4.28}$$

Для расчета лапласиана в узле i расчетной сетки применяется теорема Стокса

$$\int_V \nabla^2 Q\, d\Omega = \oint_S (\nabla Q \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

После дискретизации получим соотношение

$$(\nabla^2 Q)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j\in E_i} (\nabla Q)_j\, \mathbf{n}_{ij} s_{ij}.$$

В работе [114] разрабатывается адаптивный к расчетной сетке вариант схемы MUSCL (Self-Adaptive Scheme, SAS). Расчеты течений в канале и затухающей изотропной турбулентности проводятся при помощи метода MILES (подсеточная модель не используется, а диссипация вводится разностной схемой).

4.5.2. Метод кусочно-параболической реконструкции. Схема Чакраварти–Ошера представляет собой TVD-схему, построенную при помощи предположения о кусочно-параболическом распределении консервативных переменных внутри контрольного объема [98]

$$Q_i(x) = Q_i + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + 3\varkappa \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i \left[(x - x_i)^2 - \frac{h^2}{12}\right],$$

где $\varkappa$ — параметр.

Производные представляются в следующем виде (для упрощения записи соотношения приводятся для случая структурированной сетки)

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2h}\left(\delta^+ Q_i + \delta^- Q_i\right);$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i = \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}\left(\delta^+ Q_i - \delta^- Q_i\right).$$

На границах $x = x_{i+1/2}$ и $x = x_{i-1/2}$ в i-й ячейке имеем

$$Q_{i+1/2} = Q_i + \frac{1+\varkappa}{4}\delta^+ Q_i + \frac{1-\varkappa}{4}\delta^- Q_i;$$

$$Q_{i-1/2} = Q_i - \frac{1-\varkappa}{4}\delta^+ Q_i - \frac{1+\varkappa}{4}\delta^- Q_i.$$

При использовании этих значений для расчета потоков на основе решения задачи о распаде произвольного разрыва схема дает осциллирующее решение. Вместо значений $\delta^+ Q_i$ и $\delta^- Q_i$ используются лимитированные разности $\delta^* Q_i$ и $\delta^{**} Q_i$ такие, чтобы выполнялось условие TVD. Лимитированные разности используются для скачков газодинамических переменных небольшой интенсивности. В случае достаточно интенсивных скачков предполагается, что кусочно-параболическому распределению внутри контрольного объема удовлетворяют римановые переменные $W = LQ$. Формулы для входных параметров в задачу о распаде произвольного разрыва примут вид

$$Q_{i+1/2} = Q_i + R_i\left[\frac{1+\varkappa}{4}\delta^* W_i + \frac{1-\varkappa}{4}\delta^{**} W_i\right];$$

$$Q_{i-1/2} = Q_i - R_i\left[\frac{1-\varkappa}{4}\delta^* W_i - \frac{1+\varkappa}{4}\delta^{**} W_i\right].$$

Приращения римановых переменных выражаются через приращения консервативных переменных

$$\delta^+ W_i = R_i^{-1}\delta^+ Q_i^+;$$

$$\delta^- W_i = R_i^{-1}\delta^+ Q_i^-.$$

Лимитированные приращения римановых переменных находятся из соотношений

$$\delta^* W_i = \operatorname{minmod}\left\{\delta^+ W_i, b\delta^- W_i\right\};$$

$$\delta^{**} W_i = \operatorname{minmod}\left\{\delta^- W_i, b\delta^+ W_i\right\}.$$

В работе [98] такой подход используется совместно с методом Рое для нахождения потоков на гранях контрольного объема, предполагая параболическое распределение по пространству произведения римановых переменных на соответствующих собственных числах. В этом случае поток через грани $i + 1/2$ контрольного объема представляется в виде

$$F_{i+1/2} = F^*_{i+1/2} - H_{i+1/2},$$

где $F^*_{i+1/2}$ — поток, вычисленный по методу Рое. Антидиссипативный член вычисляется по формуле

$$H_{i+1/2} = R_{i+3/2}(\Lambda^- \delta W)^*_{i+3/2}\frac{1-\varkappa}{4} + R_{i+1/2}(\Lambda^- \delta W)^*_{i+1/2}\frac{1+\varkappa}{4} -$$

$$- R_{i+1/2}(\Lambda^+\delta W)^*_{i+1/2}\frac{1+\varkappa}{4} - R_{i-1/2}(\Lambda^+\delta W)^*_{i-1/2}\frac{1-\varkappa}{4},$$

где $\delta W_{i+1/2} = R^{-1}_{i+1/2}\delta^+ Q_i$. Вспомогательные переменные находятся из соотношений

$$(\Lambda^-\delta W)^*_{i+3/2} = \operatorname{minmod}\left\{(\Lambda^-\delta W)_{i+3/2}, b(\Lambda^-\delta W)_{i+1/2}\right\};$$

$$(\Lambda^-\delta W)^*_{i+1/2} = \operatorname{minmod}\left\{(\Lambda^-\delta W)^*_{i+1/2}, b(\Lambda^-\delta W)_{i+3/2}\right\};$$

$$(\Lambda^+\delta W)^*_{i+1/2} = \operatorname{minmod}\left\{(\Lambda^+\delta W)_{i+1/2}, b(\Lambda^+\delta W)_{i-1/2}\right\};$$

$$(\Lambda^+\delta W)^*_{i-1/2} = \operatorname{minmod}\left\{(\Lambda^+\delta W)_{i-1/2}, b(\Lambda^+\delta W)_{i+1/2}\right\}.$$

Ограничитель потока имеет вид

$$\operatorname{minmod}(x,y) = \operatorname{sign}(x)\ \max\{0, \min[\,|x|, y\ \operatorname{sign}(x)]\} =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sign}(x)\min(|x|,|y|), & \text{если} \quad xy > 0, \\ 0, & \text{если} \quad xy \leqslant 0. \end{cases}$$

Функция sign возвращает индикатор знака своего аргумента.

При этом $b = (3-\varkappa)/(1-\varkappa)$, а параметр $\varkappa$ определяет схемы различной точности (обычно $\varkappa = 1/3$, что дает 3-й порядок аппроксимации). При $b = 1$ схема не зависит от $\varkappa$ и совпадает со схемой Колгана, поскольку $\delta^* Q_i = \delta^{**} Q_i$.

Схема Чакраварти–Ошера является устойчивой, если число Куранта не превосходит величины $4/[5 - \varkappa(1+\varkappa)b]$.

4.6. Вязкие потоки

Из соотношений (4.6) и (4.9) имеет место следующее соотношение для невязки, связанной с дискретизацией вязких потоков

$$R^V_i(Q) = \frac{1}{V_i}\oint\limits_{\partial V_i} F^V(\mathbf{n}, Q, \nabla Q)\, dS =$$

$$= \frac{1}{V_i}\left(\sum_{j\in E_i} F^V_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij} + \sum_{k\in B_i} F^V_{ik}\mathbf{n}_{ik}s_{ik}\right). \quad (4.29)$$

Учитывая, что вследствие условий прилипания и непротекания на стенке $F^V_{ik} = 0$ для $\forall k \in B_i$, и пренебрегая вязкими силами на входной границе расчетной области, соотношение (4.29) переписывается в следующем дискретном виде

$$R^V_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in E_i} F^V_{ij}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}. \quad (4.30)$$

Соотношение (4.30) используется для всех контрольных объемов, включая граничные.

После линеаризации соотношения (4.30) получим

$$R_i^V = \frac{1}{V_i}\left[\sum_{i\in B_j} \frac{\partial F_{ij}^V}{\partial(\nabla Q_{ij})}\,\mathbf{n}_{ij}s_{ij}\right], \quad \frac{\partial F_{ij}^V}{\partial(\nabla Q_{ij})} = BM^{-1}\frac{\partial Q}{\partial l}, \tag{4.31}$$

где M — матрица перехода от консервативных переменных к примитивным.

Вязкий якобиан имеет вид

$$B = \frac{\partial F^V}{\partial Q} = \frac{\partial F^V}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{\partial F^V}{\partial V}M^{-1},$$

где

$$\frac{\partial F^V}{\partial V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu n_{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu n_{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu n_{**} & 0 \\ -\dfrac{\gamma p}{\rho^2}\dfrac{\mu/\mathrm{Pr}}{\gamma-1}n_* & \mu u n_{**} & \mu v n_{**} & \mu w n_{**} & \dfrac{\gamma}{\rho}\dfrac{\mu/\mathrm{Pr}}{\gamma-1}n_* \end{pmatrix}.$$

Здесь $n_* = n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z$, $n_{**} = \dfrac{4}{3}n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z$, а $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}'$ и $\mathbf{l} = \{l_x, l_y, l_z\}'$ представляют собой единичный вектор нормали веса грани (i,j) и единичный вектор, коллинеарный грани (i,j) и направленный от узла i к узлу j, так что

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{l} = n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z.$$

На практике можно принять, что $n_* = 1$ и $n_{**} = 1$ (вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ приблизительно коллинеарны). При моделировании турбулентных течений вместо молекулярной вязкости μ и молекулярной теплопроводности λ используются их эффективные значения. Молекулярному числу Прандтля присваивается постоянное значение.

Градиент в (4.31) находится из соотношения

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{Q_j - Q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|},$$

что приводит к следующему представлению для невязки

$$R_i^V = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in E_i}\frac{Q_j - Q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}BM^{-1}\mathbf{n}_{ij}s_{ij}. \tag{4.32}$$

Для расчета градиента ∇Q в серединной точке каждой грани $\mathbf{x}_{ij} = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ в соотношении (4.31) используется полусумма соответствующих узловых значений

$$\overline{\nabla Q}_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\nabla Q)_i + (\nabla Q)_j\right].$$

Для расчета градиентов $(\nabla Q)_i$ и $(\nabla Q)_j$ в узлах сетки применяется соотношение (4.28). Однако среднее арифметическое центральных разностей не демпфирует высокочастотных гармоник решения [128]. Хотя выражение для расчета невязких потоков и включает диссипативные слагаемые, демпфирующие высокочастотные осцилляции решения, этого недостаточно в пограничном слое, где вязкие члены становятся доминирующими. Поэтому составляющая градиента в направлении наиболее короткой грани заменяется простыми разностями [130]

$$\nabla Q_{ij} = \overline{\nabla Q}_{ij} - \left(\overline{\nabla Q}_{ij} \cdot \delta \mathbf{s}_{ij} - \frac{Q_j - Q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \right) \delta \mathbf{s}_{ij}, \tag{4.33}$$

где

$$\delta \mathbf{s}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}.$$

Соотношения (4.26) и (4.28), используемые для расчета псевдолапласиана и градиента, позволяют обеспечить высокую точность результатов в пограничном слое.

4.7. Дискретизация по времени

Перепишем уравнение (4.3) в следующем виде

$$\frac{dQ}{dt} = L(Q), \tag{4.34}$$

где $L(Q)$ — дифференциальный оператор. После линеаризации уравнение (4.34) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = CQ,$$

где C — квадратная матрица.

Для дискретизации уравнения (4.34) используется метод Рунге–Кутты k-го порядка [247]

$$Q^{n+1} = \Lambda(kC)Q^n, \quad \Lambda(z) = \sum_{m=0}^{p} a_m z^m,$$

где $a_0 = a_1 = 1$ и $a_p \neq 0$. На шаге $n+1$ по времени метод Рунге–Кутты порядка k $(m = 1, \ldots, k)$ записывается в виде

$$Q^{(m)} = Q^{(0)} + \lambda_m \Delta t L(Q^{(m-1)}),$$

В качестве начального приближения используется решение, полученное на предыдущем шаге по времени $Q^{(0)} = Q^n$.

Преимущество метода Рунге–Кутты состоит в том, что он обеспечивает положительность разностной схемы (если в момент времени t^n решение является положительным, то оно останется положительным и в момент времени t^{n+1}). С точки зрения программной реализации,

достоинство метода Рунге–Кутты заключается в том, что он требует хранения результатов расчетов только на двух слоях по времени.

Область устойчивости $S = \{z = x + iy\colon |\Lambda(z)| \leqslant 1\}$ имеет вид окружности с радиусом r_c и на комплексной плоскости представляется в виде

$$z = r \exp(i\theta).$$

Радиус области устойчивости находится из соотношения [246]

$$r_c = \min_{\theta} r(\theta) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

Области устойчивости для методов Рунге–Кутты различного порядка показаны на рис. 4.8, причем $r_c = 0{,}25$ для $k = 1$, $r_c = 0{,}5$ для $k = 2$, $r_c = 1{,}25$ для $k = 3$, $r_c = 1{,}39$ для $k = 4$ и $r_c = 2{,}7$ для $k = 5$.

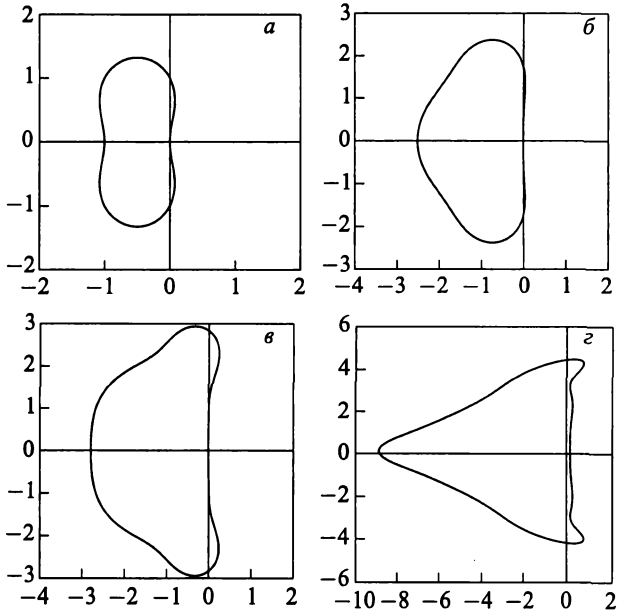


Рис. 4.8. Области устойчивости методов Рунге–Кутты порядка $k = 2$ (*а*); 3 (*б*); 4 (*в*); 5 (*г*)

Приведем структуру методов Рунге–Кутты различного порядка.

1. Метод Рунге–Кутты 1-го порядка ($k = 1$)

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(0)}).$$

2. Метод Рунге–Кутты 2-го порядка ($k = 2$)

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(0)});$$

$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(1)}).$$

3. Метод Рунге–Кутты 3-го порядка ($k = 3$)

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{3}\Delta t L(Q_i^{(0)});$$
$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t L(Q_i^{(1)});$$
$$Q_i^{(3)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(2)}).$$

4. Метод Рунге–Кутты 4-го порядка ($k = 4$)

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{4}\Delta t L(Q_i^{(0)});$$
$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{3}\Delta t L(Q_i^{(1)});$$
$$Q_i^{(3)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t L(Q_i^{(2)});$$
$$Q_i^{(4)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(3)}).$$

5. Метод Рунге–Кутты 5-го порядка

$$Q_i^{(m)} = Q_i^{(0)} - \alpha_m \Delta t_i R_i^{(m-1)},$$

где

$$R_i^{(m-1)} = C_i(Q_i^{(m-1)}) - B_i^{(m-1)};$$
$$B_i^{(m-1)} = \beta_m D_i(Q_i^{(m-1)}) + (1 - \beta_m) B_i^{(m-2)}.$$

При этом C_i учитывает вклад конвективных членов, а D_i учитывает вклад источниковых членов, физической и численной диссипации ($m = 1, \ldots, 5$). Коэффициенты схемы α_m и β_m принимают следующие значения [246]

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_5 = 1;$$
$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{14}{25}, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = \frac{11}{25}.$$

Поскольку $\beta_2 = 0$ и $\beta_4 = 0$, то $D_i(Q_i^{(2)})$ и $D_i(Q_i^{(4)})$ не рассчитываются.

Шаг по времени находится исходя из оценки невязких и вязких потоков в каждом узле расчетной сетки

$$\frac{1}{\Delta t_i} = \frac{1}{\mathrm{CFL}} \max\left\{\frac{1}{\Delta t_i^I}, \frac{\varepsilon}{\Delta t_i^V}\right\},$$

где $\varepsilon \sim 0{,}5$. Число Куранта–Фридрихса–Леви CFL используется в качестве параметра расчета.

Шаг по времени Δt_i^I в узле i вычисляется исходя из спектрального радиуса якобиана дискретного невязкого оператора

$$\frac{1}{\Delta t_i^I} = \frac{1}{V_i}\left[\sum_{j\in E_i} \rho(A_{ij})\mathbf{n}_{ij}s_{ij} + \sum_{k\in B_i} \rho(A_{ik})\mathbf{n}_{ik}s_{ik}\right],$$

где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы $A = \partial F^I/\partial Q$.

Шаг по времени Δt_i^V в узле i вычисляется исходя из квазилинейной формы вязких потоков, записанных в примитивных переменных, и спектрального радиуса якобиана дискретного вязкого оператора. Полагая длину каждой грани равной $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, получим

$$\frac{1}{\Delta t_i^V} = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in E_i} \rho(B_{ij})\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}\mathbf{n}_{ij}s_{ij},$$

где $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы $B = \partial F^V/\partial Q$.

4.8. Решение системы разностных уравнений

Для ускорения сходимости итерационного процесса используется многосеточный метод решения системы разностных уравнений (используется несколько уровней дискретизации). Многосеточный подход позволяет разрешить конфликты между аппроксимацией гладких компонент решения, которые можно эффективно аппроксимировать на грубой сетке, но которые медленно сходятся на подробной сетке, и аппроксимацией высокочастотных компонент решения, которые необходимо аппроксимировать на подробной сетке. Объем вычислительной работы определяется реальным масштабом изменения решения.

4.8.1. Вычисление невязки. Многосеточный метод решения системы разностных уравнений основан на использовании последовательности уменьшающихся сеток и операторов перехода от одной сетки к другой.

Для обеспечения сходимости необходимо выполнение условия [175]

$$O_P + O_R > O_E,$$

где O_P и O_R представляют собой наивысшие степени полиномов $+1$, которые интерполируются точно операторами продолжения и ограничения, а O_E — порядок дифференциального уравнения (равен двум для уравнений Навье–Стокса).

На шаге продолжения (с грубой сетки на подробную) для реконструкции решения используется линейная интерполяция

$$\Delta Q_i^h = \Delta Q_j^H + \left(\mathbf{x}_i^h - \mathbf{x}_j^H\right)\cdot\nabla\left(\Delta Q^H\right)_j \quad \text{для}\,\forall\, i \in K_j,$$

где ΔQ представляет собой поправку решения. Индексы h и H относятся к подробной и грубой сетке соответственно.

На шаге ограничения (с подробной сетки на грубую) вычисляется среднеобъемная невязка

$$R_j^H = \sum_{i \in K_j} V_i^h R_i^h \Big/ \sum_{i \in K_j} V_i^h. \tag{4.35}$$

Для большинства сеток выполняется условие

$$V_j^H = \sum_{i \in K_j} V_i^h.$$

Однако около границы возможно, что

$$V_j^H > \sum_{i \in K_j} V_i^h,$$

поэтому вместо (4.35) используется модифицированное соотношение

$$R_j^H = \sum_{i \in K_j} V_i^h R_i^h \Big/ \max\Big\{V_j^H, \sum_{i \in K_j} V_i^h\Big\}.$$

Ошибка, которая не устраняется методом релаксации, убирается с помощью коррекции решения на грубой сетке.

4.8.2. Реализация многосеточного подхода. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$N(Q) = f, \tag{4.36}$$

где N — дискретный оператор.

Решение проводится на последовательности сеток $h_1 > h_2 > \ldots > h_{M-1} > h$, начиная с самой грубой сетки. Решение на грубых сетках используется для коррекции аппроксимации решения на подробной сетке. На каждой сетке $k = 1, \ldots, M$ имеется свое разностное уравнение вида $N^k(Q) = f^k$. В отсутствие согласованного решения, получается относительная погрешность аппроксимации порядка $O(h_k^p)$ на k-й сетке. Хорошая аппроксимация достигается тогда, когда вектор Q^{l-1} оказывается близким к Q^l по крайней мере с точностью порядка $O(h_{l-1}^p)$. Решение на более грубой сетке Q^l служит начальным приближением для решения на подробной сетке Q^{l-1}.

Для решения системы нелинейных уравнений (4.36) применяется схема полной аппроксимации (Full Approximation Scheme, FAS) [82]. В отличие от методов линеаризации по Ньютону с адаптацией числа многосеточных итераций на каждой итерации или с фиксированным числом многосеточных итераций на каждом шаге, схема полной аппроксимации позволяет избежать глобальной линеаризации (линеаризация проводится внутри цикла на самой грубой сетке) и не проводить расчета больших якобианов, а также использовать разнообразные алгоритмы сглаживания. Согласования внутренних и внешних итераций не требуется.

Итерационная процедура для системы уравнений (4.36) записывается в виде

$$Q^{n+1} = Q^n + J^{-1}\left[f - N(Q^n)\right] \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где J — якобиан, а $R = f - N(Q^n)$ представляет собой невязку.

В дискретном виде на подробной сетке имеем

$$N^h(\widehat{Q}^h) = f^h,$$

где $\widehat{Q}^h$ — точное решение дискретной системы. Выбирая Q^h в качестве начального приближения, определим погрешность решения

$$E^h = \widehat{Q}^h - Q^h,$$

поэтому

$$N^h\left(Q^h + E^h\right) = f^h. \tag{4.37}$$

Вычитая $N^h(Q^h)$ из обеих частей уравнения (4.37), получим

$$N^h\left(Q^h + E^h\right) - N^h(Q^h) = f^h - N^h(Q^h) = R^h(Q^h).$$

Ограничим невязку и решение на более грубую сетку

$$N^H(E^H) = I_h^H R^h(Q^h);$$
$$N^H\left(I_h^H Q^h + E^H\right) - N^H(I_h^H Q^h) = I_h^H\left[f^h - N^h(Q^h)\right].$$

Под I_h^H и I_H^h понимаются операторы ограничения на грубую сетку и переноса (интерполяции) на подробную сетку, в частности, $Q^H = I_h^H R^h$, $Q^h = I_H^h R^H$. На подробную сетку переносится погрешность и невязка, а не решение, поскольку именно погрешность и невязка являются гладкими функциями.

При этом на грубой сетке

$$f^H = I_h^H\left[f^h - N^h(Q^h)\right] + N^H(I_h^H Q^h).$$

Для решения системы уравнений $N^H(Q^H) = f^H$ делается n_c сглаживающих итераций на грубой сетке (обычно $n_c \sim 10$).

Поправка при переходе с подробной на грубую сетку имеет вид

$$T_h^H = N^H(I_h^H Q^h) - I_h^H N^h(Q^h).$$

Поправка к уравнению на грубой сетке делается для того, чтобы решение на грубой сетке совпадало с решением на подробной сетке.

Алгоритм решения системы разностных уравнений реализуется в виде следующей итерационной последовательности шагов.

1. Делается μ_1 приближений решения на подробной сетке при помощи метода Гаусса–Зейделя (предварительное сглаживание)

$$Q^h := Q^h + J_h^{-1}\left[f^h - N^h(Q^h)\right].$$

После расчета невязки $R^h = f^h - N^h(Q^h)$ производится ее ограничение на более грубую сетку $R^H = I_h^H R^h$. Точное решение на грубой сетке находится из соотношения $N^H(Q^H) = N^H(I_h^H Q^h) + R^H$, после чего осуществляется перенос погрешности на более подробную сетку $E^H = Q^H - I_h^H Q^h$.

2. Коррекция аппроксимации решения на подробной сетке (ограничение на грубую сетку и интерполяция на подробной сетке)

$$Q^h := Q^h + E^h = Q^h + I_H^h \left(Q^H - I_h^H Q^h\right).$$

3. Делается μ_2 приближений решения на подробной сетке (постсглаживание)

$$Q^h := Q^h + J_h^{-1}\left[f^h - N^h(Q^h)\right].$$

Число многосеточных итераций составляет γM_k. Под γ понимается рекурсивный параметр, влияющий на качество коррекции на грубой сетке (используются разные значения для сеток различного уровня). Обычно полагается $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и используется либо V-цикл ($\gamma = 1$), либо W-цикл ($\gamma = 2$).

4.8.3. Построение вложенных сеток. Выбор и построение последовательности сеток представляет собой один из важных элементов реализации многосеточного подхода и во многом определяет качество вычислительной процедуры.

Последовательность вложенных сеток строится при помощи метода схлопывающихся граней (Edge Collapse Method, ECM) [14, 253].

Два узла i и j неструктурированной сетки, связанных гранью, заменяются одним узлом, расположенным посередине между ними (рис. 4.9, *а*). Схлопывание ячейки (edge collapse) производится в направлении наиболее короткой грани (рис. 4.9, *б*). Соответствующий вы-

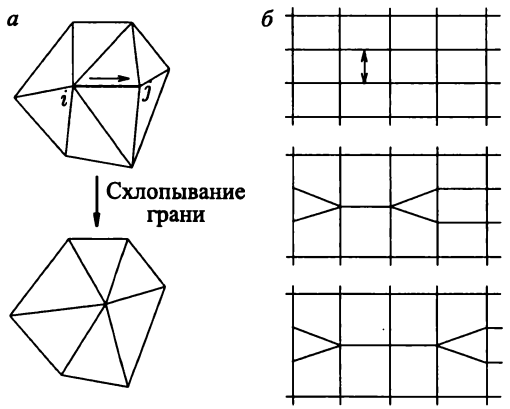


Рис. 4.9. Схлопывание ячейки в направлении наиболее короткой грани

числительный алгоритм имеет рекурсивную природу и сравнительно просто реализуется.

Обратный подход, в котором вводится дополнительный узел сетки в серединной точке грани (vertex split), используется для построения адаптивных сеток [253].

Количество вложенных сеток представляет собой параметр задачи и обычно не превышает четырех. Дальнейшее увеличение числа вложенных сеток приводит к увеличению времени, необходимого на их построение, не оказывая существенного влияния на ускорение сходимости многосеточных итераций.

4.9. Расчет вязкости и ширины фильтра

Реализация комбинированного LES/RANS подхода основана на использовании модели Спаларта–Аллмараса.

4.9.1. Модель турбулентности. Модель Спаларта–Аллмараса предполагает решение уравнения переноса для рабочей переменной $\widetilde{\nu}$, являющейся аналогом турбулентной вязкости

$$\frac{\partial \rho\widetilde{\nu}}{\partial t} + (\rho\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{\nu} = \frac{1}{\sigma}\Big\{\nabla\Big[(\mu+\rho\widetilde{\nu})\,\nabla\widetilde{\nu}\Big] + c_{b2}\nabla\widetilde{\nu}\cdot\nabla\rho\widetilde{\nu}\Big\} + S. \quad (4.38)$$

Источниковый член в уравнении (4.38) учитывает порождение и диссипацию турбулентной вязкости

$$S_{\widetilde{\nu}} = \underbrace{c_{b1}\,\widetilde{S}\,\widetilde{\nu}}_{\text{производство}} \underbrace{-\left(c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\varkappa^2}\,f_{t2}\right)\left(\frac{\widetilde{\nu}}{d}\right)^2}_{\text{диссипация}} + \underbrace{f_{t1}\,(\Delta U)^2}_{\text{переход}}.$$

Здесь d — расстояние от центра контрольного объема до ближайшей стенки. Рабочая переменная $\widetilde{\nu}$ связана с турбулентной вязкостью при помощи соотношения $\nu_t = f_{v1}\widetilde{\nu}$. Член производства турбулентности моделируется соотношением

$$\widetilde{S} = Sf_{v3} + \frac{\widetilde{\nu}}{\varkappa^2 d^2}\,f_{v2},$$

в котором S вычисляется на основе величины завихренности

$$S = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2},$$

где

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

В модифицированной модели источниковый член находится из соотношения

$$S = |\Omega| + 2\min\{0, |S| - |\Omega|\},$$

где

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Для обеспечения корректного поведения рабочей переменной в логарифмическом слое ($\widetilde{\nu} = \varkappa y u_\tau$) вводится демпфирующая функция

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\widetilde{\nu}}{\nu}.$$

Функции f_{v2} и f_{v3} имеют следующий вид

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_{v3} = 1.$$

Функция f_w играет роль во внешней области пограничного слоя

$$f_w = g\left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6}\right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\widetilde{\nu}}{\varkappa^2 d^2 \widetilde{S}}.$$

Функция g выступает в качестве ограничителя, предотвращая завышенные значения f_w. Параметры r и f_w равняются единице в логарифмическом слое и уменьшаются во внешней области. Постоянным модели присваиваются значения $c_{b1} = 0{,}1355$, $c_{b2} = 0{,}622$, $\sigma = 2/3$, $c_{v1} = 7{,}1$, $c_{w1} = c_{b1}/\varkappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma$, $c_{w2} = 0{,}3$, $c_{w3} = 2{,}0$, $\varkappa = 0{,}42$.

Функции f_{t1}, f_{t2} и g_t контролируют ламинарно-турбулентный переход в некоторой точке (x_t, y_t, z_t) пограничного слоя

$$f_{t1} = c_{t1}\, g_t \exp\left[-c_{t2}\frac{S_t^2}{\Delta U^2}\left(d^2 + g_t^2 d_t^2\right)\right];$$

$$f_{t2} = c_{t3} \exp\left(-c_{t4}\chi^2\right);$$

$$g_t = \min\left\{0.1, \frac{\Delta U}{S_t \Delta x_t}\right\}.$$

Расстояние до стенки находится из соотношения

$$d_t = \left[(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 + (z - z_t)^2\right]^{1/2}.$$

Здесь d_t — расстояние от точки перехода до стенки; S_t — величина завихренности; $\Delta U = |u - u_t|$, Δx_t — шаг сетки вдоль стенки. Постоянные принимают значения $c_{t1} = 1$, $c_{t2} = 2$, $c_{t3} = 1{,}2$, $c_{t4} = 0{,}5$.

Для улучшения сходимости при расчете отрывных потоков (возможны отрицательные значения $\widetilde{S}$ при сильном изменении r) источниковый член переопределяется следующим образом

$$\widetilde{S} = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2} \widetilde{f}_{v3} + \frac{\widetilde{\nu}}{\varkappa^2 d^2} \widetilde{f}_{v2},$$

где

$$\widetilde{f}_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^{-3}, \quad \widetilde{f}_{v3} = \frac{1}{\chi}(1 + \chi f_{v1})\left(1 - \chi \widetilde{f}_{v2}\right), \quad c_{v2} = 5.$$

В данном случае $\widetilde{S} \geqslant 0$. Несмотря на это, если $\widetilde{\nu} = 0$, и величина завихренности обращается в ноль, то $\widetilde{S} = 0$. Для избежания численных проблем вместо χ полагается $\max\{\chi, 10^{-4}\}$. Модифицированная функция $\widetilde{f}_{v2}$ остается положительной вдоль стенки.

4.9.2. Комбинированный подход. В модели Спаларта–Аллмараса используется расстояние от центра контрольного объема до ближайшей стенки d, играющее важное значение в определении уровня производства и диссипации турбулентной вязкости. В методе моделирования отсоединенных вихрей расстояние до стенки d заменяется новым масштабом $\widetilde{d}$, который находится из соотношения

$$\widetilde{d} = \min\{d, C_{\mathrm{DES}}\Delta\},$$

где $C_{\mathrm{DES}} = 0{,}65$, Δ — ширина фильтра. Для структурированной сетки ширина фильтра выбирается как максимальное значение из шагов сетки в различных координатных направлениях

$$\Delta = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

В случае неструктурированной сетки в качестве Δ выбирается максимальная длина грани среди всех граней, связанных с данным узлом сетки

$$\Delta_i = \max_j\{s_{ij}\}.$$

Вихревая вязкость считается пропорциональной ширине фильтра

$$\nu_t = (C_S\Delta)^2\left(2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}\right)^{1/2},$$

где C_S — постоянная Смагоринского.

Для устранения недостатков модели Смагоринского (локальность, необходимость подбора модельного параметра, диссипативность, некорректность предсказания вихревой вязкости в ламинарной области и около стенки) в каждом узле сетки вихревая вязкости рассчитывается дважды, используя LES (модель Смагоринского) и RANS (SA-модель) подходы. В качестве вихревой вязкости выбирается минимальное значение из двух величин

$$\nu_t = \min\{\nu_{\mathrm{RANS}}, \nu_{\mathrm{LES}}\}.$$

В отличие от DES, в котором переключение между LES и RANS определяется сеточным разрешением, комбинированный LES/RANS подход к расчету вихревой вязкости представляется предпочтительным.

В ламинарной области модель Смагоринского дает ненулевое (некорректное) значение вихревой вязкости, и вихревая вязкость рассчи-

тывается при помощи модели Спаларта–Аллмараса. Вдали от стенки величина Δ становится пропорциональной размеру наименьших вихрей, разрешаемых на данной сетке, и вихревая вязкость рассчитывается при помощи модели Смагоринского. По мере приближения к стенке размер вихрей уменьшается, а вихревая вязкость контролируется моделью Спаларта–Аллмараса.

Ширина фильтра обычно связывается с размером ячейки разностной сетки. Поскольку уравнения не осредняются, а фильтруются, операция фильтрации должна коммутировать с операцией дифференцирования по времени и пространству. В общем случае, коммутативность требует постоянства ширины фильтры, что приводит к требованию равномерной сетки [217].

В связи с тем, что использование равномерных сеток оказывается неэффективным и дорогостоящим с вычислительной точки зрения, в качестве ширины фильтра выбирается линейная комбинация ее локального и глобального значений

$$\Delta = c_{f1}\left[(1 - c_{f2})\Delta_1 + c_{f2}\Delta_2\right],$$

где c_{f1} и c_{f2} — модельные коэффициенты. Локальная ширина фильтра пропорциональна локальной длине грани данного контрольного объема Δ_1, а глобальное значение ширины фильтра полагается равным самой длинной грани сетки Δ_2. Для сетки с постоянным шагом $c_{f2} = 0$.

Моделирование крупных вихрей является принципиально трехмерным подходом. С вычислительной точки зрения, для расчета двумерных течений и оценки недостающих членов используется свойство подобия существующих слагаемых. Для оценки инварианта тензора скоростей деформаций используются следующие соотношения (ось x_1 совпадает с направлением потока, а в направлении оси x_3 течение не моделируется)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \simeq \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \simeq \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \simeq \frac{\partial v_2}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right).$$

Такой подход представляется оправданным с вычислительной точки зрения, но не соответствует трехмерной природе LES.

Инвариант тензора скоростей деформаций рассчитывается при помощи следующих соотношений:

— двумерный случай

$$|S| = 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2;$$

— трехмерный случай

$$|S| = 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2.$$

Для расчета градиента скорости в узле сетки используется соотношение, полученное при помощи формулы Грина и описываемое соотношением (4.28).

4.10. Формулировка начальных и граничных условий

При использовании метода моделирования крупных вихрей, а также комбинированных подходов, требуется постановка нестационарных граничных условий, обусловленных пульсационным характером турбулентного потока.

4.10.1. Начальные условия. При моделировании статистически стационарных течений начальные условия не играют роли. Тем не менее, удачное задание начальных условий позволяет сократить затраты машинного времени на получение статистически стационарного решения.

В случае нестационарных расчетов поле течения в существенной степени определяется удачным заданием начальных условий [137].

Средние значения искомых функций задаются исходя из данных физического эксперимента или рассчитываются при помощи интегрирования осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (достижения полной сходимости численного решения не требуется). На средние значения накладываются случайные флуктуации, распределение вероятности которых во времени подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией.

В более сложных ситуациях используются такие же подходы к формированию случайного поля скорости, что и на входной границе расчетной области (метод вихрей, спектральный синтезатор).

4.10.2. Входная граница. Успех применения LES к расчету различных течений, например, плоской струи [201], пограничного слоя [229], течения за обратным уступом [50], во многом определяется удачным выбором граничных условий на входе в расчетную область, что требует определенной информации (средняя скорость, компоненты тензора рейнольдсовых напряжений, масштаб турбулентности) для их надлежащей постановки.

Основная цель разработок в данном направлении состоит в уменьшении области течения, на которой сказывается влияние граничных условий на входе, и получении поля течения, наиболее близкого (в некотором смысле) к реальному турбулентному потоку.

На границе, через которую жидкость поступает в расчетную область, обычно задается распределение скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности, направление потока, а также распределения полного давления и полной температуры (или числа Маха).

На практике находят применение различные приемы постановки граничных условий на входной границе, позволяющие учесть нестационарный характер течения. Однако ни один из них не позволяет достоверно описать турбулентную структуру рассматриваемых течений и не является универсальным.

В случае свободных сдвиговых течений задача несколько упрощается, поскольку эти течения неустойчивы, и колебания в них возникают даже при отсутствии внешних источников возмущений. Используя достаточно удаленные от области течения границы и простые граничные условия (например, случайные возмущения в виде белого шума), удается получить нестационарное течение в большей части расчетной области.

4.10.2.1. Расширение расчетной области. На входе в расчетную область задается произвольное распределение скорости (возможно, путем произведения над ним некоторой последовательности манипуляций). Вниз по потоку выделяется плоскость течения, нормальная к направлению основного потока (рис. 4.10), с которой рассчитанные значения искомых функций (если необходимо, то производится перемасштабирование) переносятся во входное сечение [229] (Precursor Simulation, PS).

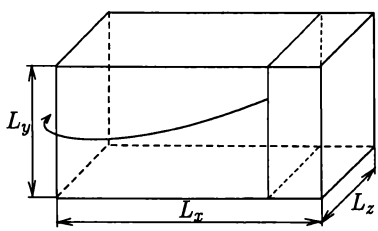


Рис. 4.10. Постановка граничных условий

Такой подход находит применение для расчетов пограничных слоев, в частности, течения за обратным уступом [50]. При моделировании течения за обратным уступом в расчетной области $(10h, 5h, 4h)$ на сетке, имеющей $3{,}5 \cdot 10^5$ узлов, плоскость, на которой извлекаются значения искомых функций, располагается при $x = 8h$, где h — высота уступа.

Применительно к моделированию полностью развитого течения в канале или в пограничном слое такой подход предполагает постановку периодических граничных условий в направлении потока. Очевидно, что область применения метода ограничивается достаточно простыми течениями, и предполагает, что течение на входе в расчетную область является полностью развитым, а, следовательно, такой подход не обладает нужной степенью общности и универсальности.

Основные усилия концентрируются на разработке подходов (метод случайных возмущений, метод вихрей, синтезированная турбулент-

ность) к генерации псевдотурбулентного поля течения, которое имеет схожие черты с реальным турбулентным потоком.

4.10.2.2. Случайные возмущения. В том случае, когда граничные условия на входе зависят от времени, на распределения средних параметров потока накладываются случайные возмущения [267]. Пренебрежение возмущениями на входной границе допускается лишь в том случае, когда уровень турбулентности является пренебрежимо малым или не играет роли в развитии течения.

В простейшем случае используются возмущения в виде белого шума

$$\overline{v'}_i = 0, \quad \overline{v'_i v'_j} = a\delta_{ij},$$

где a — дисперсия, которая считается заданной.

Случайные возмущения в виде белого шума не воспроизводят реальных свойств турбулентного потока (например, пространственных или временных корреляций), а кинетическая энергия распределяется равномерно по всем волновым числам, что приводит к ее достаточно быстрой диссипации.

В более сложном случае учитывается коррелированность поля скорости, что требует дополнительной информации о поле течения.

4.10.2.3. Метод вихрей. Для более обоснованного учета влияния возмущений на входной границе вводится набор вихрей (Vortex Method, VM), взаимодействующих друг с другом (рис. 4.11). Вихри распределяются равномерно на входной границе и отстоят друг от друга на расстояние $l/2$, где l — характерный масштаб, определяющий насколько быстро затухает влияние данного вихря при удалении от его центра. В плоскости, нормальной к направлению течения, рассчитывается случайное поле скорости, которое накладывается на распределение средней скорости на входной границе.

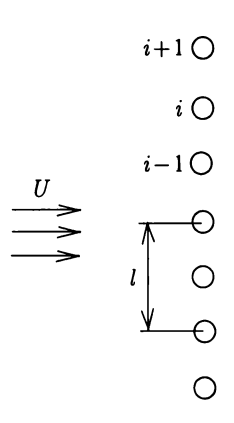


Рис. 4.11. Внесение возмущений

Положение, размер и интенсивность каждого вихря предполагаются известными в каждый момент времени. Влияние вихря в данной точке определяется корреляционной функцией

$$R(\mathbf{r}, t) = \overline{f(0,0)f(\mathbf{r}, t)} = R(0,0)\exp\left(-\frac{\pi r^2}{l^2} - \omega^2 t^2\right),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение точки относительно центра вихря (точка $\mathbf{r} = 0$); ω — частота пульсаций.

Обобщение данного подхода основано на использовании лагранжевой формы уравнения переноса завихренности и закона Био–Савара.

Величина вихря представляется в виде

$$\omega(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k(x,y,t)\eta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k|,t),$$

где N — число вихрей (vortex points). Циркуляция и пространственное распределение завихренности, связанные с k-м вихрем, на входной границе площадью S представляются в виде

$$\Gamma_k(x,y)=\left[\frac{\pi Sk(x,y)}{3N(2\ln 3-3\ln 2)}\right]^{1/4};$$

$$\eta(\mathbf{x})=\frac{1}{2\sigma^2}\left[2\exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)-1\right]2\exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$

Здесь k — кинетическая энергия турбулентности. Параметр σ контролирует размер вихря и полагается либо постоянным [238], либо связывается с локальными характеристиками турбулентности во входном сечении. Его минимальное значение ограничивается местным шагом разностной сетки

$$\sigma=\min\left\{\Delta, c\frac{k^{3/2}}{2\varepsilon}\right\},$$

где $c=0{,}16$.

Распределение скорости на входной границе расчетной области находится при помощи закона Био–Савара

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)\times\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^2}\left[1-\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k|^2}{2\sigma^2}\right)\right],$$

где $\mathbf{z}$ — единичный вектор. Знак циркуляции, связанной с каждым вихрем, меняется случайным образом через интервал времени τ. Временной масштаб τ обычно определяется как время, за которое вихрь сносится средней скоростью в направлении, нормальном к входной границе, на расстояние, равное n его размерам (обычно $n\sim 100$).

В синтетической подходе к генерации псевдотурбулентности [192] (Synthetic Eddy Method, SEM) поле скорости представляется в виде суперпозиции когерентных структур, которые генерируются во входном сечении в соответствии с заданной функцией, определяющей их пространственные и временные характеристики.

В одномерном случае на интервале $[a,b]$ генерируется сигнал, форма которого определяется функцией $f_\sigma(x)$, имеющей компактный носитель на интервале $[-\sigma,\sigma]$ и удовлетворяющей условию нормировки

$$\frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}f_\sigma^2(x)\,dx=1,$$

где $\Delta = (b-a) + 2\sigma$. Каждый i-й вихрь имеет позицию x_i, определяющую его в физическом пространстве, и линейный масштаб σ_i, определяющий его в волновом пространстве. Линейный масштаб полагается постоянным. Обычно считается, что интенсивность вихря распределяется по гауссовскому закону [192].

Вклад $u^{(i)}(x)$ от вихря i в поле скорости имеет вид

$$u^{(i)}(x) = \varepsilon_i f_\sigma(x - x_i),$$

где ε_i — случайное число, равное -1 или $+1$. Положение вихря x_i генерируется случайным образом в интервале $[a-\sigma, b+\sigma]$ (вихри генерируются на интервале, большем, чем входной отрезок, для того чтобы учесть влияние граничных точек). Сигнал в точке x представляет собой сумму вкладов всех вихрей в области и для N вихрей имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_\sigma(x - x_i).$$

Число вихрей в области полагается равным $(b-a)/\sigma$.

Сгенерированный сигнал имеет нулевое математическое ожидание, единичную дисперсию и корреляционную функцию вида [192]

$$R_{uu}(r) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_\sigma(x) f_\sigma(x+r)\, dx.$$

Расчет функции f_σ по заданной корреляционной функции требует использования сложной процедуры обращения.

В общем случае вихри представляют собой трехмерные структуры с функцией, имеющей компактный носитель в области $[-\sigma_x, \sigma_x] \times$ $\times [-\sigma_y, \sigma_y] \times [-\sigma_z, \sigma_z]$ и удовлетворяющей условию нормировки. Считается, что входное сечение $[0, L_y] \times [0, L_z]$ совпадает с плоскостью $x = 0$. Положение i-го вихря генерируется случайным образом в области вида $[-\sigma_x, \sigma_x] \times [-\sigma_y, \sigma_y + L_y] \times [-\sigma_z, \sigma_z + L_z]$. Вихри сносятся вниз по потоку от входного сечения со скоростью U, а их положение через интервал времени dt определяется с использованием гипотезы Тэйлора о замороженной турбулентности

$$x_i(t + dt) = x_i(t) + U dt.$$

При $x_i(t) > \sigma_x$ вихрь генерируется снова в точке $x = -\sigma_x$ и вновь сносится потоком. Сигнал в точке x в момент времени t во входной плоскости представляется в виде

$$u'_j(x,t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ij} f_j[x - x_i(t)],$$

где ε_{ij} — случайное число, представляющее собой знак i-го вихря j-й компоненты сигнала, равное -1 или $+1$. Число вихрей во входном

сечении определяется как S_p/S_s, где S_p — площадь входного сечения, S_s — площадь, занимаемая вихрями.

Сгенерированный сигнал имеет корреляционную функцию в виде δ-функции. При условии, что из результатов DNS, RANS или измерений известны тензор рейнольдсовых напряжений, поле скорости строится в соответствии с соотношением

$$u_i = \overline{U}_i + a_{ij}u'_j.$$

Случайное поле скорости генерируется по описанной процедуре. Коэффициенты матрицы A_{ij} выражаются через компоненты тензора рейнольдсовых напряжений

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} R_{11}^{1/2} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & (R_{22} - a_{21}^2)^{1/2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & (R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Для расчета корреляционной функции используется следующее разложение скорости [201] (одномерный линейный нерекурсивный фильтр)

$$u_m = \sum_{n=-N}^{N} b_n r_{m+n},$$

где r_m — последовательность некоррелированных случайных чисел с нулевым математическим ожиданием; b_n — коэффициенты разложения. Корреляционная функция определяется соотношением

$$\frac{\overline{u_{m+k}u_m}}{\overline{u_m u_m}} = \sum_{n=-N+k}^{N} b_n b_{n-k} \Big/ \sum_{n=-N}^{N} b_n^2.$$

Коэффициенты рассчитываются по явным формулам в случае гауссовской корреляционной функции (задаются масштаб времени или длины). В случае произвольной корреляционной функции коэффициенты разложения рассчитываются итерационным способом (метод матричной декомпозиции).

4.10.2.4. Спектральный синтезатор. Данный подход (Spectral Synthesizer, SS) основан на генерации случайного поля течения при помощи подхода, предложенного в [209] и модифицированного для реальных приложений в [66, 298].

На входе в расчетную область устанавливается вибратор, возмущающий распределение скорости по гармонической зависимости с заданной амплитудой (спектральный синтезатор). Скорость представляется в виде [298]

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{N} \left[p_i^n \cos\left(k_j^n x_j + \omega_n t\right) + q_i^n \sin\left(k_j^n x_j + \omega_n t\right)\right],$$

где p_i, q_i — амплитуды; ω — частота.

Используя результаты RANS (например, расчеты по k–ε модели турбулентности), такой подход позволяет учесть анизотропность турбулентности на входной границе. При этом распределение скорости удовлетворяет уравнению неразрывности по построению.

Случайное поле скорости получается в виде обратного преобразования Фурье с заданной спектральной плотностью [205]. Амплитуды гармоник рассчитываются на основе заданного модельного спектра, а фазы выбираются случайным образом.

Такой подход приемлем для генерации периодического сигнала на равномерной сетке, что ставит вопрос о возможности их использования в случае неоднородной турбулентности и неструктурированной сетки во входном сечении (в этом случае быстрое преобразование Фурье неприменимо). Для сокращения вычислительных усилий число гармоник ограничивается [66, 298] (обычно учитывается порядка 100 гармоник).

В работе [198] на примере моделирования течения в плоском канале при $\mathrm{Re}_\tau = 400$ показано, что при использовании подхода [66] область установления полностью развитого режима течения в канале составляет около $20h$, где h — полуширина канала.

4.10.2.5. Другие подходы. Другой подход, пригодный для использования на произвольной сетке и в случае неоднородной турбулентности, состоит в фильтрации случайного сигнала на входной границе [201] (обычно применяется гауссовский фильтр). При сгущении сетки такой подход становится достаточно дорогостоящим в вычислительном плане.

Используется также ортогональная декомпозиция сигнала, приходящего от внешнего источника [142]. Метод требует знания предыдущей реализации течения, и схема его применения остается неясной.

4.10.2.6. Сравнение различных подходов. В работе [192] проводится сравнение различных подходов к постановке граничных условий во входном сечении применительно к моделированию затухающей изотропной турбулентности и течения в канале.

Применительно к моделированию затухающей изотропной турбулентности результаты расчетов показывают, что метод случайных возмущений приводит к довольно быстрой диссипации кинетической энергии в пределах нескольких расчетных ячеек от входного сечения.

Переход от ламинарного режима течения в канале к турбулентному происходит на расстоянии порядка $110h$, где h — полуширина канала. Спектральный метод требует расстояний порядка $10h$ для того, чтобы воспроизвести корректный уровень турбулентности в пограничном слое [192]. При использовании метода случайных возмущений во входном сечении течение имеет тенденцию к реламинаризации. Точность результатов при использовании других подходов оказывается сравнимой. При этом переход от ламинарного течения к турбулентному происходит на расстоянии порядка $3h$ от входного сечения.

4.10.3. Выходная граница. При решении задачи в неограниченной области из-за отсутствия точных граничных условий, заменяющих условие на бесконечности для исходной задачи с неограниченной областью, постановка граничных условий реализуется приближенным способом [27]. Возмущения, дойдя до внешней границы, частично отражаются от них, искажая решение внутри расчетной области. Конечные размеры расчетной области затрудняют изучение длительных по времени процессов. Ослабление нежелательного влияния границы достигается путем ее удаления от источников возмущения. При этом из-за увеличения числа узлов сетки возрастают затраты машинного времени.

При расчете стационарных течений на выходной границе, через которую жидкость покидает расчетную область, обычно выставляются мягкие граничные условия, выражающие собой условие о равенстве нулю производной по нормали к границе ($\partial/\partial n = 0$).

При моделировании нестационарных дозвуковых течений возникает проблема постановки граничных условий для выходящего потока газа, содержащего интенсивные вихревые структуры [27, 42]. Возможные нефизические эффекты генерации и отражения звуковых волн на выходной границе искажают реальную картину потока. Имеются вычислительные алгоритмы, обеспечивающие эффективное поглощение продольных квазиплоских звуковых волн, приходящих ко входной границе из внутренней области, а также компенсирующие эффекты генерации звуковых волн на выходной границе при пересечении ее вихрями.

Проблема отыскания граничных условий на искусственной границе расчетной области, которые не отражают приходящие к ним возмущения, является важной с точки зрения сокращения затрат времени счета и получения достоверных результатов на длинном промежутке времени.

Для нестационарных расчетов широкое применение находят неотражающие граничные условия (Non-Reflecting Boundary Condition, NRBC)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial n} = 0,$$

где U — скорость, не зависящая от расположения выходной границы, которая выбирается исходя из условия сохранения массы (поток массы на входе равняется потоку массы на выходе из расчетной области). Это позволяет избежать проблем, связанных с отражением волн давления от выходной границы.

4.10.4. Стенка. На стенке для составляющих скорости ставятся граничные условия непротекания и прилипания, выражающие собой равенство нулю нормальной и тангенциальной составляющих скорости

$$v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad v_\tau = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0,$$

где $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к поверхности преграды.

Для температуры задается температура стенки T_w. Граничные условия для давления выставляются при помощи дискретизации уравнения изменения количества движения в проекции на нормаль к стенке. Для постановки граничных условий для характеристик турбулентности на стенке используется метод пристеночных функций.

Присутствие стенки сдерживает рост мелких вихрей и изменяет механизм обмена энергией между разрешимыми и неразрешимыми масштабами турбулентности. При этом число сеточных узлов, необходимых для расчета течения в пограничном слое, возрастает до величины, характерной для DNS.

Прямое численное моделирование турбулентного пограничного слоя требует, чтобы $\Delta x^+ = 15$, $y^+ \ll 1$, $\Delta z^+ = 5$ (направление оси x совпадает с направлением течения, а ось y направлена по нормали к обтекаемой поверхности).

Для реализации LES необходимо, чтобы $\Delta x^+ = 50 \div 150$, $\Delta y^+ < 1$, $\Delta z^+ = 15 \div 40$ [267] (при этом в пограничном слое размещается около 20–30 узлов). Применение метода пристеночных функций позволяет уменьшить количество узлов сетки вблизи стенки, при этом $\Delta x^+ = 100 \div 600$, $y^+ < 30 \div 150$, $\Delta z^+ = 100 \div 300$ [269].

Для смягчения требований, предъявляемых к вычислительным ресурсам, и учета влияния различных факторов, например, шероховатости поверхности, используются метод пристеночных функций и различные модели турбулентного пограничного слоя [90, 269]. При этом разрешается только внешняя область пограничного слоя, а внутренняя область моделируется. Практически во всех моделях во внутренней области явно или неявно используется подход Рейнольдса и статистическое осреднение параметров потока.

Метод пристеночных функций или другие подходы к моделированию течения в пристеночной области обычно приводят к более высокой точности при достаточно больших числах Рейнольдса [269] и грубой сетке в направлении потока.

Для получения достаточно представительной выборки вихрей на масштабе, сравнимом с шагом расчетной сетки, требуется достаточно большой шаг сетки [269], например, для течения в канале $\Delta x^+ \sim 1500$, $\Delta z^+ \sim 700$. В этом случае среднеквадратическая величина разности мгновенной скорости и скорости, вычисленной в соответствии с логарифмическим законом, не превышает 10%. В случае достаточно подробной сетки в пристеночной области ($\Delta x^+ \sim 100 \div 200$, $\Delta z^+ \sim 50 \div 100$) статистические условия, на которых основана пристеночная модель, нарушаются. При достаточно грубой сетке в направлении, параллельном стенке ($\Delta x^+ > 1000$, $\Delta z^+ > 500$), но в случае, когда пристеночный узел располагается достаточно достаточно близко к стенке (например, при $\Delta y^+ < 50$), сетка не позволяет разрешить

турбулентные вихри в этой области потока (возникающая численная ошибка искажает профиль скорости).

4.10.5. Другие условия. Периодические граничные условия выставляются для всех искомых функций на противоположных границах расчетной области при расчете течений в области, обладающей свойством симметрии (повторяемости).

4.11. Метод пристеночных функций

Пристеночные функции представляют собой набор полуэмпирических формул, которые связывают искомые функции в пристеночных ячейках сетки с соответствующими величинами на стенке.

4.11.1. Структура пограничного слоя. В турбулентном пограничном слое обычно выделяется несколько подобластей (рис. 4.12), используя расстояние от стенки $y^+ = yu_\tau/\nu$ и скорость потока $u^+ = u/u_\tau$, выраженные в пристеночных единицах, где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$.

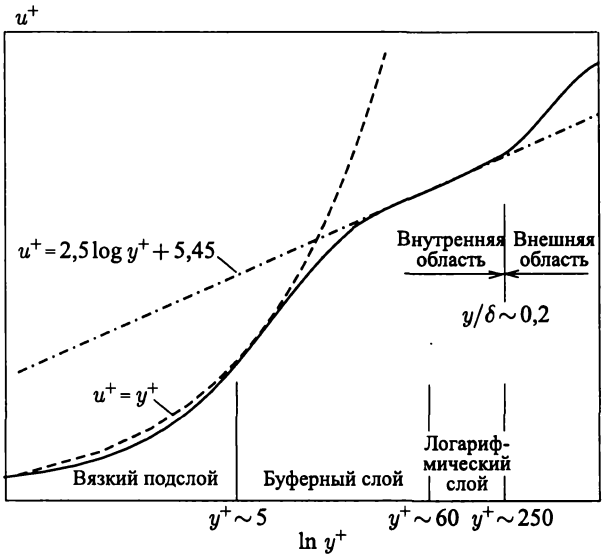


Рис. 4.12. Структура пограничного слоя

Пристеночная область потока обычно разделяется на внешнюю и внутреннюю области [44].

Область закона следа и область перемежаемости обычно объединяются во внешнюю область турбулентного пограничного слоя, которая занимает порядка 80 % от толщины всего слоя. Внешний слой является областью полностью развитого турбулентного течения, свойства которого зависят от предыстории потока. Полное затухание возмущений во

внешней области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности.

Для расчета течения во внешней области используются фильтрованные или осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса.

Вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скорости составляют внутреннюю область пограничного слоя (область закона стенки). На плоской пластине она занимает примерно 20% от толщины пограничного слоя и в ней генерируется до 80% энергии турбулентности. В вязком подслое поток является практически ламинарным, и вязкие напряжения доминируют над турбулентными. В переходном слое вязкие и турбулентные напряжения имеют одинаковый порядок.

Во внутренней области профиль скорости слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и других внешних условий, что служит основой для построения универсальных соотношений (пристеночных функций), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод пристеночных функций опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций и свойство локальной изотропности диссипирующих вихрей. В методе пристеночных функций внутренний слой (вязкий подслой и переходная область пограничного слоя) точно не разрешается, а описывается полуэмпирически. Использование пристеночных функций освобождает от необходимости модификации моделей турбулентности для расчета характеристик течения в пристеночной области.

В другом подходе полуэмпирические модели турбулентности модифицируются таким образом, чтобы разрешать всю пристеночную область потока, включая вязкий подслой, при условии обеспечения необходимого разрешения сетки в пограничном слое. Низкорейнольдсовые модели турбулентности справедливы для расчета турбулентных течений во всей расчетной области (область течения, удаленная от твердых границ, и пристеночная область течения). Низкорейнольдсовые модели турбулентности различаются формой записи источниковых членов в уравнениях переноса и граничными условиями на стенке.

4.11.2. Закон стенки. В вязком подслое вязкие напряжения доминируют над рейнольдсовыми, и имеет место линейная зависимость скорости от расстояния до стенки $u^+ = y^+$ (при $0 \leqslant y^+ < 11$).

В логарифмическом слое рейнольдсовые напряжения намного превышают вязкие напряжения, а профиль скорости описывается логарифмическим законом $u^+ = \dfrac{1}{\varkappa} \ln E y^+$ (при $11 \leqslant y^+ < 0{,}2\delta$, где δ — толщина пограничного слоя). Для гладкой стенки $E = 8{,}8$.

В буферном слое вязкие и рейнольдсовые напряжения имеют одинаковый порядок. Сшивая профили скорости в вязком подслое и логарифмическом слое, получим $u^+ = A \ln y^+ + B$, где $A = 4{,}94$, $B = -2{,}96$.

Как правило, считается, что буферная область находится в диапазоне $5 < y^+ < 30$. Во многих случаях буферной зоной пренебрегают.

При моделировании неравновесных пограничных слоев вместо величин y^+ и u^+ используются их модифицированные значения

$$y^* = \frac{c_\mu^{1/4} k^{1/2} y}{\nu}, \quad u^* = \frac{c_\mu^{1/2} k^{1/2}}{\tau_w/\rho}.$$

Параметры y^+ и y^* являются равнозначными в равновесном случае.

Закон стенки рассматривается как решение уравнений движения в турбулентном пограничном слое, полученное при использовании модели пути смешения Прандтля в предположении, что конвективные члены и градиент давления пренебрежимо малы. Во многих случаях наблюдается также почти универсальный характер распределения температуры, и закон стенки используется для задания граничных условий на внутренней границе при решении уравнения изменения энергии.

Обычно считается, что закон стенки выполняется при $30 < y^+ < 200$, и первый от стенки расчетный узел располагается в этом интервале. Конкретная реализация подхода зависит от выбранной модели турбулентности и используемой разностной схемы. Функции, входящие в закон стенки, нуждаются в модификации для точного описания эффектов, связанных с шероховатостью поверхности.

Стандартные пристеночные функции надежно себя зарекомендовали при расчете пограничных слоев, близких к равновесным. Для моделирования пограничных слоев, подверженных влиянию больших градиентов давления, используются неравновесные пристеночные функции. Логарифмический закон распределения средней скорости с учетом градиента давления имеет вид

$$\frac{\widetilde{u} c_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\tau_w/\rho} = \frac{1}{\varkappa} \ln\left(E c_\mu^{1/4} k^{1/2} y\right),$$

где

$$\widetilde{u} = u - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\left[\frac{y_v}{\rho k^{3/2}} \ln\left(\frac{y}{y_v}\right) + \frac{y - y_v}{\rho k^{3/2}} + \frac{y_v^2}{\mu}\right].$$

Толщина вязкого подслоя полагается равной $y_v = 11{,}225$.

Реализация метода пристеночных функций требует итерационной процедуры для нахождения пристеночных сдвиговых напряжений (для этого обычного обычно используется метод Ньютона). В работе [338] предлагается аналитическое выражение для сдвиговых напряжений на стенке, основанное на интегрировании степенного профиля скорости около стенки («закон 1/7»).

4.11.3. Реализация метода пристеночных функций. Распределение сдвиговых напряжений полагается однородным в пределах пристеночного контрольного объема. Сдвиговые напряжения на стенке вычисляются по формуле $\tau_w = \mu_{\text{eff}} \Delta u/\Delta y$, где Δu и Δy — разности скоростей и координат между стенкой и пристеночным узлом.

Учитывая, что $\mu_{\text{eff}} = \mu \mathrm{Re}/u^{+2}$, где $\mathrm{Re} = \rho \Delta u \Delta y/\mu = u^+ y^+$, получим $\tau_w = \rho \Delta u^2/u^{+2}$. При использовании k–ε модели сдвиговые напряжения и число Рейнольдса выражаются через кинетическую энергию турбулентности

$$\tau_w = \frac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta u}{\dfrac{1}{\varkappa} \ln (E\mathrm{Re})}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta y}{\mu}.$$

При $\mathrm{Re} \leqslant 140$ распределение скорости описывается соотношением

$$0 = u^+ + \left[\exp(\varkappa u^+) - 1 - \varkappa u^+ - \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] \times \\ \times \exp(-\varkappa B) - \frac{\mathrm{Re}}{u^+}. \quad (4.39)$$

Для решения нелинейного уравнения (4.39) применяется метод Ньютона. Итерации начинаются с $u^+ = \mathrm{Re}^{1/2}$ (в ламинарном подслое имеет место линейная связь $u^+ = y^+$).

При $\mathrm{Re} > 140$ скорость u^+ находится из логарифмического распределения, которое записывается в виде

$$y^+ = u^+ + \left[\exp(\varkappa u^+) - \varkappa u^+ - \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] \exp(-\varkappa B), \quad (4.40)$$

где $B = 5{,}3$. При помощи взятия натурального логарифма от (4.40) получим соотношение

$$0 = u^+ - B - \frac{1}{\varkappa} \ln\left\{\left[1 + \varkappa u^+ + \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 + \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-\varkappa B) + \frac{\mathrm{Re}}{u^+} - u^+\right\}. \quad (4.41)$$

Для решения нелинейного уравнения (4.41) применяется метод Ньютона. В качестве начального приближения используется соотношение $u^+ = B + \dfrac{1}{\varkappa} \ln \mathrm{Re}$. Соотношение (4.41) дает более быструю сходимость метода Ньютона, чем соотношение (4.40).

Профиль температуры вблизи стенки имеет вид

$$y^+ = \frac{h^+}{\mathrm{Pr}_t} + \exp[-\varkappa(B+P)] \times \\ \times \left[\exp\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right) - 1 - \frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^3\right],$$

где P представляется в виде

$$P = 9{,}24\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t}\right)^{-1/4}.$$

Тепловой поток находится из соотношения

$$q_w = \rho u_\tau \frac{\Delta h}{h^+}, \quad q_w = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\Delta h}{\Delta y}.$$

Приравнивая и выражая τ_w, получим

$$\mu_t = \mathrm{Pr}_t\left(\frac{\mathrm{Re}}{u^+h^+} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\mu.$$

Исходное уравнение решается при помощи метода Ньютона

$$0 = \frac{h^+}{\mathrm{Pr}_t} + \exp\left[-\varkappa(B+P)\right] \times \\ \times \left[\exp\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right) - 1 - \frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^3\right] - \frac{\mathrm{Re}}{u^+}.$$

Величина u^+ выражается из логарифмического закона.

4.11.4. Слабые граничные условия. Расчеты турбулентных течений на неструктурированных сетках демонстрируют существенную зависимость решения от шага сетки вблизи стенки [10, 16].

Для скорости на стенке, как правило, используются граничные условия прилипания и непротекания (жесткие граничные условия). Несмотря на то, что постановка условия скольжения на стенке $v_\tau \neq 0$ (слабые граничные условия) противоречит физической реальности (разреженные течения не рассматриваются), такой подход используется в вычислительной практике, но, в основном, при дискретизации уравнений Навье–Стокса по методу конечных элементов [117], что позволяет избежать применения пристеночных функций и связанных с ними проблем. При постановке слабых граничных условий влияние стенки на поток учитывается в виде сеточных напряжений сдвига и дополнительной сеточной генерации турбулентности за счет отличия профиля касательной скорости от логарифмического распределения около стенки.

Слабые граничные условия реализуются через расчет касательной скорости на стенке, которая добавляется в невязку, обусловленную дискретизацией невязких потоков через грани пристеночного контрольного объема (рис. 4.13).

Напряжение сдвига на стенке полагается однородным в пределах контрольного объема и рассчитывается по формуле $\tau_w = \mu_{\mathrm{eff}}\Delta q S/\Delta y$, где Δy — расстояние от пристеночного узла до стенки, Δq — разность касательных скоростей между пристеночным узлом и стенкой, S — площадь грани, μ_e — эффективная вязкость.

Касательные скорости на стенке находятся из соотношений

$$u_{\tau 1} = u_{\tau 2} - \tau_x\frac{\Delta y}{\mu_{\mathrm{eff}}}, \quad v_{\tau 1} = v_{\tau 2} - \tau_y\frac{\Delta y}{\mu_{\mathrm{eff}}}, \quad w_{\tau 1} = w_{\tau 2} - \tau_z\frac{\Delta y}{\mu_{\mathrm{eff}}},$$

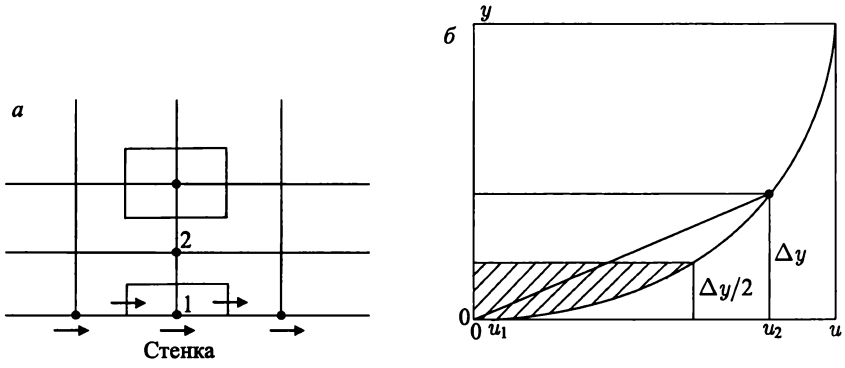


Рис. 4.13. Внутренний и граничный контрольные объемы (фрагмент *а*) и профиль скорости в пограничном слое (фрагмент *б*)

где

$$\tau_x = \tau_w \frac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad \tau_y = \tau_w \frac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad \tau_z = \tau_w \frac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}.$$

Составляющие касательной скорости $\{u_\tau, v_\tau, w_\tau\}$ в локальной системе координат связаны с декартовыми составляющими скорости $\{u, v, w\}$ при помощи соотношений $u_\tau = u - v_n n_x$, $v_\tau = v - v_n n_y$, $w_\tau = w - v_n n_z$, где $v_n = un_x + vn_y + wn_z$ представляет собой скорость по нормали к грани контрольного объема.

С точки зрения программной реализации, расчет касательной скорости включается в процедуру дискретизации невязких потоков, требуя сравнительно небольших модификаций кода [14], основанного на методе пристеночных функций.

В модифицированном подходе логарифмический профиль скорости продолжается вплоть до стенки (вязкий подслой не разрешается, как и в методе пристеночных функций). Касательная скорость на стенке получается при помощи осреднения по логарифмическому распределению скорости в пристеночном контрольном объеме (рис. 4.13). Штриховка соответствует области, используемой для осреднения по логарифмическому профилю скорости.

Касательная скорость на стенке находится из соотношений

$$u^*_{\tau 1} = u_b \frac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad v^*_{\tau 1} = u_b \frac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad w^*_{\tau 1} = u_b \frac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}.$$

Полученные значения используются для расчета невязки, обусловленной дискретизацией невязких потоков. Скорость потока в пограничном слое $u_b = \mu u_b^+ / \rho \Delta y$, выраженная в пристеночных единицах, рассчитывается с использованием закона стенки (4.39), что дает

$$u_b^+ = u^+ y^+ - \frac{1}{2} u^{+2} + \frac{1}{\varkappa} \left(u^+ - y^+\right) + \frac{1}{24 \varkappa E} \left(\varkappa u^+\right)^4, \qquad (4.42)$$

где $y^+ = \mathrm{Re}/u^+$. Соотношение (4.42) получается при помощи интегрирования распределения (4.39) в пределах пристеночного контрольного объема с последующим использованием соотношения (4.40) для упрощения. Решение нелинейного уравнения, определяющего u^+, производится при помощи метода Ньютона.

С точки зрения программной реализации двух подходов к реализации слабых граничных условий, отличие заключается лишь в способе расчета касательной скорости на стенке (по явным формулам в исходном и с использованием логарифмического профиля скорости в модифицированном подходе).

Слабые граничные условия обладают рядом преимуществ перед методом пристеночных функций, к которым можно отнести сравнительно простой подход к программной реализации при использовании различных моделей турбулентности, использование более грубой сетки в пристеночной области, смягчение сеточной зависимости решения [10]. При этом также отпадает необходимость реализации процедуры пристеночного моделирования для температуры.

Основной недостаток слабых граничных условий состоит в том, что они носят численный характер и лишены физической обоснованности. При этом следует отметить, что и пристеночные функции достаточно часто используются в ситуациях, в которых закон стенки неприменим (например, для расчета пограничных слоев, подверженных влиянию градиента давления, или в случае, когда значения пристеночной координаты y^+ находятся ниже рекомендованного значения).

4.11.5. Двухслойные модели. Наиболее простой подход к моделированию течения во внутренней области пограничного слоя заключается в использовании логарифмического профиля скорости. Разрешается только внешняя область пограничного слоя, а стоимость реализации оценивается как $\mathrm{Re}^{1/2}$.

В подходе [135] (течение в канале) в пристеночном узле сетки пренебрегается всеми слагаемыми в уравнении изменения количества движения, за исключением вторых производных скорости. Сетка содержит 6720 узлов, а для разрешения объема порядка h^3 используется около 400 узлов, что почти в 6 раз меньше числа узлов, рекомендованных в [101].

Использование осреднения профиля скорости по плоскости, параллельной стенке, позволяет повысить точность расчетов [287]. Сдвиговые напряжения на стенке связываются со скоростью в ядре потока. Для их нахождения применяется итерационная процедура на основе метода Ньютона, а средняя скорость в пристеночном узле удовлетворяет логарифмическому закону. Для учета растяжений вихревых структур в пограничном слое при расчете сдвиговых напряжений на стенке используется мгновенная скорость потока и учитывается корреляция поля скорости [62, 269].

Приведенные подходы с той или иной долей успеха применяются для расчетов сравнительно простых течений, а сдвиговые напряжения на стенке рассчитываются исходя из закона стенки. При этом считается, что закон стенки выполняется в среднем или локально. Успех применения подхода, в которых используется мгновенная скорость с последующим осреднением по объему, в существенной степени зависит от выбора объема, по которому проводится осреднение [269, 342].

Другая возможность расчета течения во внутренней области состоит в решении уравнений турбулентного пограничного слоя в совокупности с некоторой простой моделью турбулентности [269, 314] (зонный подход). Предполагается, что взаимодействие между внешней и внутренней областями пограничного слоя является слабым.

Уравнения турбулентного пограничного слоя имеют вид [125]

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_n \bar{v}_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_n}\right].$$

Индекс n указывает на нормаль к стенке (при этом $i = 1, 2$ или $i = 1, 3$ в зависимости от того, какая плоскость, x–y или x–z, рассматривается). Во внутренней области решаются две одномерные задачи.

Уравнения пограничного слоя замыкаются при помощи некоторой простой модели турбулентности (обычно используется алгебраическая модель турбулентности, например, модель Прандтля, в которой путь смешения связывается с расстоянием до стенки $l = \varkappa y$), после чего интегрируется аналитически или численного для каждого пристеночного контрольного объема (рис. 4.14). Для дальнейшего упрощения уравнений пограничного слоя пренебрегается некоторыми слагаемыми (например, градиентом давления или нестационарным членом), хотя это и не находит подтверждения во многих случаях [91].

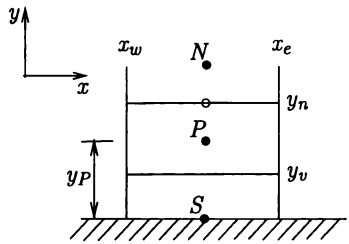


Рис. 4.14. Пристеночный контрольный объем

Скорость по нормали к стенке v_n рассчитывается исходя из условия сохранения массы во внутренней области. На стенке для скорости используется условие прилипания. Скорость в пристеночном узле сетки получается из расчета течения во внешней области пограничного слоя, в которой решаются фильтрованные уравнения Навье–Стокса.

В отличие от метода моделирования отсоединенных вихрей, в зонном подходе используется две сетки: одна для расчета течения во внешней области (течение описывается фильтрованными уравнениями уравнениями Навье–Стокса), а другая — для решения уравнений Рейнольдса во внутренней области [62].

Для интегрирования уравнений пограничного слоя используется основная сетка и дополнительная сетка. В каждом пристеночном

контрольном объеме строится подробная сетка (предполагается, что в пограничном слое сетка является структурированной). Левая часть уравнений пограничного слоя дискретизируется на подробной сетке с использованием подсеточных узловых значений. Правая часть уравнений полагается постоянной в пределах контрольного объема и рассчитывается в узлах основной сетки (в узле P). Турбулентная вязкость в подсеточных узлах (в узлах дополнительной сетки) определяется на основе низкорейнольдсовой версии k–ε модели турбулентности.

Подход, основанный на решении уравнений Рейнольдса во внутренней области пограничного слоя, находит применение для моделирования течения в плоскопараллельном канале [62, 90] (при $\mathrm{Re}_\tau = 200 \div 2000$), течения канале с квадратной формой поперечного сечения в плане, течения во вращающемся канале [269], течения за обратным уступом [91].

В случае плоскопараллельного канала метод пристеночных функций и зонный подход дают приблизительно одинаковую точность [90]. Результаты, полученные на основе зонного подхода при значении постоянной $B = 5$ (вместо значения $B = 5{,}5$ в законе стенки), лучше согласуются с данными измерений при высоких числах Рейнольдса.

В квадратном канале в окрестности угловых точек возникает вторичное течение, и логарифмический закон нарушается. Решение уравнений пограничного слоя позволяет преодолеть недостатки метода пристеночных функций, использующем допущение о локальном равновесии генерации и диссипации [269].

Расчета течения за обратным уступом проводятся при $\mathrm{Re} = 2{,}8 \cdot 10^4$ на сетке $146 \times 97 \times 96$, что на 10% меньше, чем в расчетах [52], которые не используют закон стенки. Положение точки присоединения пограничного слоя хорошо совпадает с данными [52], хотя интенсивность течения в рециркуляционной зоне получается более сильной.

Вместо модели Прандтля используется модель Спаларта–Аллмараса [139], что требует постановки дополнительного граничного условия на верхней границе внутренней области пограничного слоя. Турбулентная вязкость во внутренней области полагается равной подсеточной вязкости на нижней границе внешней области пограничного слоя (такое граничное условие применимо, если скорость и ее первая производная являются гладкими функциями на границе раздела подобластей). Результаты расчетов течения за обратным уступом на сетке $160 \times 80 \times 32$ согласуются с данными, полученными при помощи модели Прандтля [91]. В отличие от подхода [91], использование модели Спаларта–Аллмараса во внутренней области позволяет воспроизвести угловые вихри и вторичную рециркуляционную зону [139] (однако угловые вихри вытянуты в направлении, нормальном к стенке).

Использование дополнительных дифференциальных уравнений увеличивает расчетное время приблизительно на 30%, хотя и позволяет в ряде случаев получить более точные результаты, согласующиеся с результатами Resolved LES, DNS и данными измерений.

4.11.6. Другие подходы. Помимо метода пристеночных функций и зонного подхода, развивается и тестируются другие подходы к моделированию течения в пристеночной области, призванные смягчить требования к сетке в этой области.

В подходе [61] делается попытка учесть в модели пограничного слоя влияние крупномасштабных когерентных структур на основе метода линейной стохастической оценки (Linear Stochastic Estimate, LSE) сдвиговых напряжений на стенке. Метод LSE дает наилучшую оценку скорости (в терминах наименьших квадратов), соответствующую заданному параметру (скорость, скорость деформации или давление). Такой подход приводит к необходимости предварительного нахождения двухточечной пространственной корреляционной функции, которая рассчитывается исходя из данных прямого численного моделирования.

Для расчета сдвиговых напряжений на стенке, соответствующих известному уровню средней скорости во внешней области, используется теория оптимального управления [256]. Стоимость такого подхода примерно в 20 раз превышает затраты на реализацию LES при использовании метода пристеночных функций.

4.12. Средние параметры потока и спектр пульсаций

Результаты численного моделирования позволяют определить средние параметры потока и спектральное распределение кинетической энергии турбулентности при помощи статистической обработки полученных данных (путем осреднения полученных результатов по ансамблю реализаций или по времени).

4.12.1. Переход к средним параметрам. Пренебрегая подсеточными флуктуациями плотности, переход к средним по времени параметрам осуществляется следующим образом

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N} f(\mathbf{x}, t^n); \qquad \langle f(\mathbf{x})\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f^n(\mathbf{x}, t).$$

Здесь T — интервал времени; N — число реализаций (в расчетах $N \sim 5 \cdot 10^4$). Черта обозначает осреднение по времени, а угловые скобки — по ансамблю реализаций.

Флуктуация около среднего значения вычисляется как среднее разности ее мгновенного и среднего значений

$$f'(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) - \overline{f(\mathbf{x})}; \quad f'(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) - \langle f(\mathbf{x})\rangle .$$

Среднеквадратическое значение флуктуации находится из соотношения

$$\overline{f'^2}(\mathbf{x}) = \left\{\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N}\Big[f(\mathbf{x}, t^n) - \langle f(\mathbf{x})\rangle\Big]^2\right\}^{1/2};$$

$$\left\langle f'^2(\mathbf{x})\right\rangle = \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[f^n(\mathbf{x},t) - \langle f(\mathbf{x})\rangle\right]^2\right\}^{1/2}.$$

В случае достаточно большого числа шагов по времени ошибка находится из соотношений

$$\Delta\bar{f} = \alpha\frac{f'}{N^{1/2}}, \quad \Delta f' = \alpha\frac{1}{[2(N-1)]^{1/2}},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Корреляционные моменты вычисляются по формуле

$$\overline{f'(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})} = \left\{\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N}\left[f(\mathbf{x},t^n) - \overline{f(\mathbf{x})}\right]\left[g(\mathbf{x},t^n) - \overline{g(\mathbf{x})}\right]\right\}^{1/2};$$

$$\left\langle f'(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})\right\rangle = \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[f(\mathbf{x},t_n) - \langle f(\mathbf{x})\rangle\right]\left[g(\mathbf{x},t_n) - \langle g(\mathbf{x})\rangle\right]\right\}^{1/2}.$$

Здесь n — номер шага по времени.

4.12.2. Преобразование Фурье. В теории турбулентности используется энергетический спектр, который характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора независимо от его направления. Энергетический спектр находится на основе рассчитанной зависимости составляющих скорости в узлах сетки от времени (оценки показывают, что для удовлетворительного разрешения колебания требуется около 4–5 расчетных точек на период).

Считая, что функция $u(t)$ является периодической с периодом T, представим ее в виде разложения в ряд Фурье

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2\pi\omega_n t) + b_n\sin(2\pi\omega_n t)].$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(2\pi\omega_n t)\,dt; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(2\pi\omega_n t)\,dt.$$

Под $\omega_n = n/T$ понимается частота n-й гармоники. В дискретной форме соотношения для расчета коэффициентов Фурье приобретают следующий вид

$$a_n = \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{M} u(x,t_m)\cos(2\pi\omega_n t_m)\,\Delta t_m;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{M} u(x,t_m)\sin(2\pi\omega_n t_m)\,\Delta t_m.$$

Здесь M — число шагов по времени на период.

Коэффициенты Фурье рассчитываются при помощи следующих рекурентных соотношений

$$a_{n,1} = 0; \quad a_{n,m} = a_{n,m-1} + \frac{2}{T} u(x, t_m) \cos(2\pi\omega_n t_m)(t_m - t_{m-1});$$
$$a_n = a_{n,M}.$$

Для нулевой моды расчетные соотношения имеют вид

$$a_{0,1} = 0; \quad a_{0,m} = a_{0,m-1} + \frac{1}{T} u(x, t_m)(t_m - t_{m-1});$$
$$a_0 = a_{0,M}.$$

Здесь $m = 2, \ldots, M$.

Глава 5

РАСЧЕТЫ ВНУТРЕННИХ И СТРУЙНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Интенсификация переносных свойств среды во многих технических устройствах (газовые турбины, камеры смешения, газогенераторы, теплообменники) и уровень тепловых нагрузок на обтекаемой поверхности в существенной степени обусловлены турбулентной структурой формирующихся потоков.

В данной главе приводятся результаты расчетов внутренних и струйных турбулентных течений (течение в канале с твердыми стенками, течение в канале с распределенным вдувом, течение в слое смешения, течение в изотермической и неизотермической струе, течение в области взаимодействия потока с преградой, аэрооптические эффекты в турбулентном потоке), сравнивается точность и эффективность различных подсеточных моделей. Результаты расчетов средних и пульсационных параметров потока сравниваются с данными физического эксперимента, имеющимися результатами и данными, полученными при помощи решения осредненных уравнений Рейнольдса.

5.1. Вычислительные ресурсы

Вычислительная процедура реализована в виде компьютерного кода на языках программирования Fortran и C/C++ [15]. Детали реализации и распараллеливания программного кода приведены в [10, 15].

Для распараллеливания вычислений применяется интерфейс межпроцессорного взаимодействия MPI (Message Passing Interface) и библиотека подпрограмм OPlus (Oxford Parallel Library for Unstructured Solvers), реализованная на языке Fortran 77 в вычислительной лаборатории университета Оксфорда (Oxford University Computing Laboratory, United Kingdom) для платформ Win32, Linux, SGI, AIX.

К достоинствам библиотеки OPlus относятся использование обобщенных структур данных (в качестве элемента данных рассматриваются грани и ячейки, которые имеют различный тип — шестигранники, призмы, параллелепипеды, тетраэдры), производительность (посылка сообщений происходит только при модификации данных, а для уменьшении задержек при посылках сообщений данные объединяются в пакеты), переносимость (для посылки сообщений используются функции MPI). Использование библиотеки OPlus позволяет запустить програм-

му как в последовательном режиме без вызова функций передачи сообщений (что удобно, например, для отладки кода), так и в параллельном режиме. Последовательная версия библиотеки содержит функции с теми же аргументами, что и ее параллельная версия, но которые не выполняют действий по передаче сообщений (пустое тело функции).

В работе [15] приводятся данные по эффективности параллелизации вычислений для задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне с подвижной верхней крышкой и некоторых других.

Для проведения расчетов используются 60-процессорный кластер на базе процессора Opteron 2,4 ГГц (30 узлов) и суперкомпьютер IBM SP/1600 с узлами eServer pSeries 690 Regatta на базе процессора Power 4+ 1,7 ГГц.

Вычисления производились в режиме удаленного терминала. Кластер компании Cluster Vision Ltd расположен в Университете Суррея (University of Surrey, United Kingdom). Суперкомпьютерный центр находится в лаборатории Дарсбери (Daresbury Laboratory, Warrington, United Kingdom) и создан в результате проекта HPCx. Система поддерживается HPCx-консорциумом (UoE HPCx Ltd), в который входят университет Эдинбурга (University of Edinburgh), Центральная лаборатория совета по научным исследованиям (Central Laboratory for the Research Councils, CLRC) и компания IBM. Учебно-методическую поддержку осуществляет компьютерный центр университета Эдинбурга (Edinburgh Parallel Computer Center, EPCC).

5.2. Полностью развитое течение в канале

Проводится сравнение точности и вычислительной эффективности ряда моделей подсеточной вихревой вязкости (модели Смагоринского, RNG-модели, динамической модели и однопараметрической модели) применительно к расчету полностью развитого турбулентного течения в канале [13]. Результаты расчетов сравниваются с данными физического эксперимента и результатами прямого численного моделирования.

5.2.1. Начальные и граничные условия. В качестве начальных условий в момент времени $t = 0$ задаются распределения скорости, давления и температуры. Составляющие скорости находятся из распределения завихренности, которое задается случайным образом.

В продольном направлении выставляются периодические граничные условия (условия повторения течения). На стенке для составляющих скорости выставляются граничные условия непротекания и прилипания, а также температура стенки.

На выходе из расчетной области для всех искомых функций используются неотражающие граничные условия.

5.2.2. Параметры и сетка. Параметрам потока во входном сечении присваивались следующие значения: $\rho_0 = 1{,}18$ кг/м^3, $u_0 = 180{,}0$ м/с, $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Температура стенки считается постоянной $T_w = 288$ К. Для рабочей среды принимались следующие параметры: $\gamma = 1{,}4$, $R = 287{,}1$ Дж/(кг·К), $c_p = 1004{,}85$ Дж/(кг·К), $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{sgs}} = 0{,}8$.

Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_0 u_0 h/\mu_0$, которое варьировалось в диапазоне $\mathrm{Re} \simeq 100 \div 6000$ за счет надлежащего изменения динамической вязкости. Принятый интервал изменения числа Рейнольдса соответствует диапазону $\mathrm{Re}_\tau \simeq 10 \div 600$, где $\mathrm{Re}_\tau = \rho_0 u_\tau h/\mu_0$. В основном расчетном варианте полагается $\mathrm{Re}_\tau = 360$ (при этом $\mu = 0{,}039$ Па·с).

Расчеты проводились на сетке $150 \times 65 \times 65$ со сгущением узлов к стенкам. По координате x узлы сетка распределяются с равномерным шагом. Максимальные шаги по координатным направлениям составляли $\Delta x = 0{,}052$ м, $\Delta y = \Delta z = 0{,}045$ м. Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 0{,}00025$ с. Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делалось 40000 шагов по времени. Выбранные шаги сетки примерно в 3 раза превышают как колмогоровский масштаб длины $l_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, так и масштаб ν/u_τ^2, построенный на основе динамической скорости.

5.2.3. Результаты расчетов. Картина течения в канале, обработанная в виде в линий равных значений вихря скорости, показана на рис. 5.1.

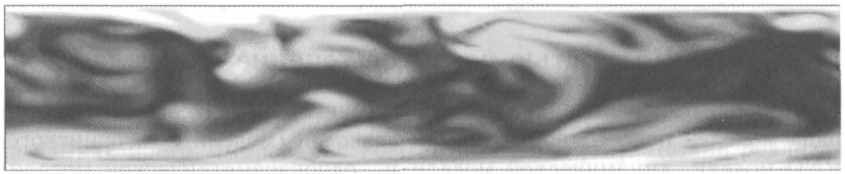


Рис. 5.1. Вихревая картина течения в канале при $t = 0{,}32$ с

Профиль продольной скорости в поперечном сечении канала приведен на рис. 5.2. Результаты расчетов нормируются на максимальную скорость в поперечном сечении. Значки ○ соответствуют модели Смагоринского, □ — модели Ван Дриста, △ — RNG-версии модели Смагоринского, сплошная линия — динамической модели, ◇ — дифференциальной модели вихревой вязкости, а значки • — данным прямого численного моделирования [244]. Пунктирной линией показан профиль скорости ламинарного течения. Полученные результаты показывают, что модель Смагоринского дает менее наполненный профиль скорости, чем остальные модели. Введение демпфирующей функции Ван Дриста улучшает результаты расчетов, которые становятся практически идентичными данным, рассчитанным на основе динамической модели.

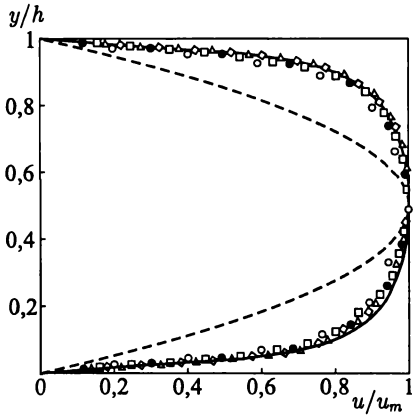


Рис. 5.2. Распределения продольной скорости в поперечном сечении

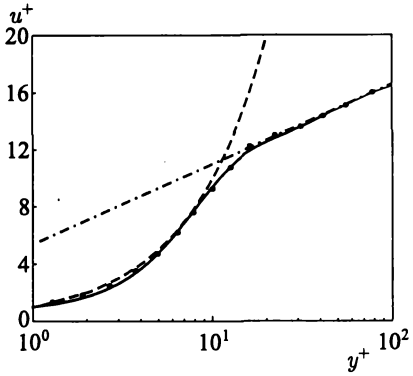


Рис. 5.3. Распределение скорости в пограничном вблизи стенки

Распределение скорости около стенки достаточно хорошо согласуется с законом Рейхардта [44], построенным на основе экспериментальных данных и охватывающим вязкий подслой, буферную и логарифмическую области пограничного слоя (рис. 5.3). Приведенные результаты соответствуют расчетам с использованием динамической модели (сплошная линия). Значки • соответствуют закону Рейхардта [44], а пунктирная и штрихпунктирная линии — линейному распределению скорости в вязком подслое и логарифмическому распределению в турбулентной области пограничного слоя.

Рассчитанные значения кинетической энергии турбулентности в сравнении с данными прямого численного моделирования [244, 252] при $\mathrm{Re}_\tau = 395$ (значки •) показаны на рис. 5.4.

Распределения пульсационных составляющих скорости в поперечном сечении канала приведены на рис. 5.5 в сравнении с данными [252, 314] (значки •). В то время как модель Смагоринского и модель Ван Дриста дают заниженные значения пульсаций продольной скорости, результаты расчетов по пульсациям поперечной скорости, полученные на основе различных моделей, достаточно хорошо согласуются между собой (приведенные данные соответствуют динамической модели).

Распределения рейнольдсовых и подсеточных напряжений показаны на рис. 5.6. Изменение турбулентной вязкости в пограничном слое в зависимости от расстояния до стенки показано на рис. 5.7 в сравнении с данными [314] (значки •). Модели Смагоринского и Ван Дриста приводят к заниженным значениям турбулентной вязкости. Наилучшее согласование с экспериментальными данными имеют динамическая модель и дифференциальная модель.

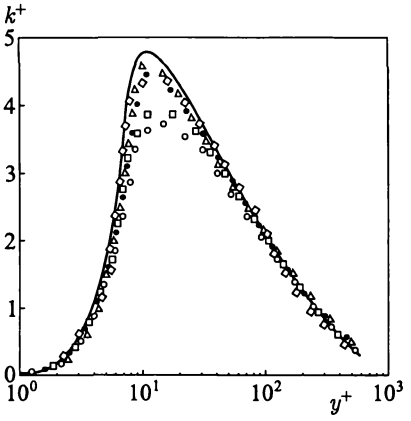


Рис. 5.4. Распределение кинетической энергии турбулентности вблизи стенки

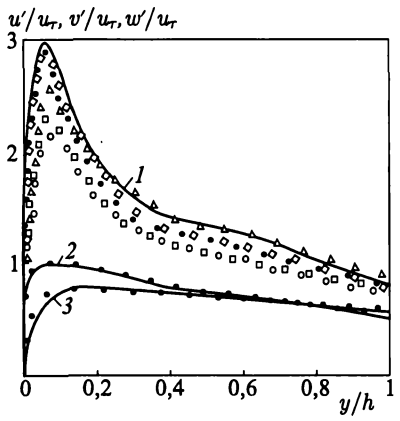


Рис. 5.5. Распределения пульсационной скорости по поперечному сечению канала (*1* — u'; *2* — v'; *3* — w') при $\mathrm{Re}_\tau = 360$

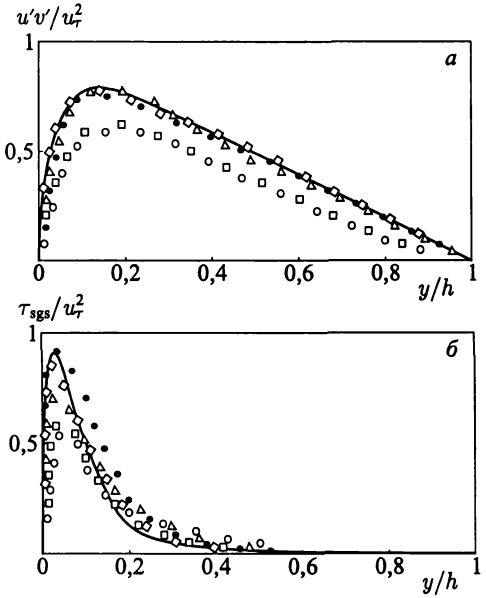


Рис. 5.6. Распределения рейнольдсовых (фрагмент *а*) и подсеточных напряжений (фрагмент *б*)

Зависимость параметра Смагоринского от расстояния от стенки канала, полученная на основе динамической модели, приведена на рис. 5.8.

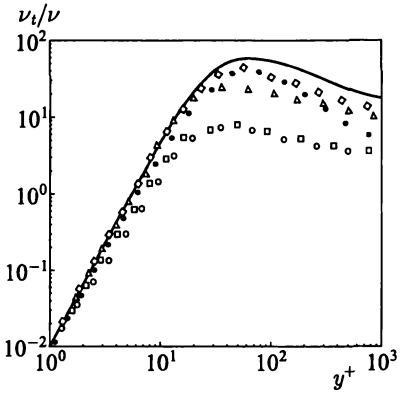


Рис. 5.7. Распределение турбулентной вязкости около стенки

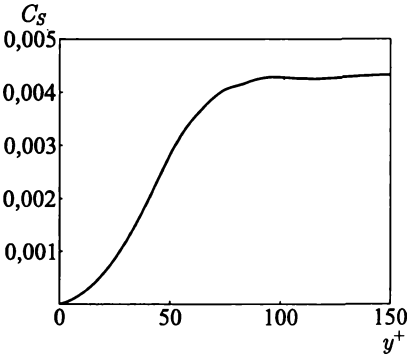


Рис. 5.8. Зависимость параметра Смагоринского от расстояния до стенки

Применение RNG-версии модели вихревой вязкости, динамической модели и дифференциальной модели приводит к увеличению времени счета на 18, 30 и 35 % соответственно по сравнению со временем, затраченным на расчет без использования какой-либо подсеточной модели.

На основе сравнения результатов расчетов с данными физического эксперимента и результатами прямого численного моделирования течения в канале можно сделать вывод о том, что модели Смагоринского и Ван Дриста приводят к достаточно большим погрешностям в предсказании пульсационных характеристик потока. Вместе с тем, все подсеточные модели дают достаточно точные оценки осредненных характеристик потока. При этом с увеличением числа Рейнольдса роль подсеточного моделирования возрастает, что подтверждается данными [152].

Результаты расчетов находятся в качественном согласовании с известными результатами прямого численного моделирования и экспериментальными данными.

5.3. Турбулентное течение в канале со вдувом

Проводится моделирование крупных вихрей турбулентного течения в канале с распределенным вдувом, и обсуждается влияние скорости вдува на средние и пульсационные характеристики потока. Результаты расчетов, полученные для различных отношений скоростей вдува с нижней и верхней стенок канала, сравниваются с данными прямого численного моделирования, решением, полученным на основе k–ε модели турбулентности, и данными физического эксперимента.

5.3.1. Точные и приближенные решения. Течение в канале с распределенным вдувом служит моделью течения продуктов разложения твердого топлива в камере сгорания ракетного двигателя

на твердом топливе (РДТТ), что отражает наиболее существенную сторону процесса — подвод массы со стороны горящей поверхности заряда. Процессы, связанные с прогревом топлива, разложением его компонентов и их химическим реагированием протекают в тонком поверхностном слое и не учитываются.

Для численных расчетов применяются физико-математические модели различной степени сложности, реализуемые при помощи конечно-разностных или конечно-объемных методов. Учитывая физические особенности течения, удается добиться существенного упрощения решения задачи [26, 37]. Построение упрощенных математических моделей, вычислительная эффективность которых достигается за счет пренебрежения влиянием некоторых факторов, обосновывается соответствующими оценками и сравнением различных подходов [22].

Уравнения, описывающие течение вязкой несжимаемой между двумя параллельными пластинами, с одной из которых производится вдув со скоростью v_w, а другая является непроницаемой, допускают точное решение [26, 37]. В предположении, что продольная скорость зависит от координаты x по линейному закону $u \sim xf(y)$, а поперечная скорость не зависит от продольной координаты $v \sim g(y)$, расчет распределения скорости сводится к интегрированию уравнения

$$g^{(4)} - \mathrm{Re}\,(gg''' - g'g'') = 0, \tag{5.1}$$

где $\mathrm{Re} = \rho v_w h/\mu$. Функции f и g связаны при помощи уравнения неразрывности ($f = -g'$). Граничные условия для уравнения (5.1) выставляются на нижней и верхней стенках канала ($g = 0$, $g' = 0$ при $y = 0$ и $g = -v_w$, $g' = 0$ при $y = h$). В качестве характерных масштабов используется расстояние между пластинами h и скорость вдува v_w.

В случае сильного вдува ($\mathrm{Re} \to \infty$) решение уравнения (5.1) представляется в конечном виде [26, 37]

$$f = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad g = -\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right). \tag{5.2}$$

Профиль скорости формируется за счет увлечения в поток масс жидкости, поступающей со стенок. Передача им импульса дает перепад давления, величина которого зависит от массового прихода от стенок. Влияние вязкости проявляется в незначительном наполнении профиля скорости в поперечном сечении.

Интенсивный вдув означает, что скорость вдува значительно превосходит по порядку величины нормальную скорость в пограничном слое вблизи непроницаемой поверхности, и в то же время скорость вдува значительно меньше средней скорости течения в канале. В этих условиях течение в слое вдуваемого газа оказывается невязким, а пограничный слой оттесняется от поверхности и преобразуется в слой смешения между вдуваемым газом и течением в канале. Толщина этого слоя оказывается малой по сравнению с толщиной слоя вдуваемого газа.

Приближенные модели для течений со вдувом [22] основаны на построении профиля продольной скорости из модели слоистого течения (уравнение Пуассона с постоянным членом в правой части) и последующим определением перепада давления из расчета потери импульса на разгон того расхода, который подведен вдувом.

Для внутренних течений в РДТТ характерно турбулентное движение рабочего тела, а процессы сложной физической природы протекают на фоне общей газодинамической обстановки в рабочем пространстве РДТТ. Вдув характеризуется параметром $v_w^+ = v_w/u_\tau$, где v_w — скорость вдува, u_τ — динамическая скорость.

Данные физического и численного эксперимента показывают, что решение (5.2) достаточно хорошо описывает распределение скорости в турбулентном режиме при $\mathrm{Re} > 80 \div 100$. Вместе с тем, приближение вихревого течения идеальной жидкости приводит к существенным погрешностям при моделировании турбулентных течений в длинных и узких каналах [100].

Стандартная k–ε модель турбулентности позволяет получить достаточно точные результаты для каналов с двухсторонним вдувом при различных оформлениях поперечного сечения канала [22, 23].

Для каналов с односторонним вдувом k–ε модель не дает удовлетворительного предсказания точки перехода ламинарного режима в турбулентный, а также уровня турбулентных пульсаций скорости [100, 113] (их величина в окрестности проницаемой стенки возрастает при увеличении скорости вдува). Вблизи непроницаемой стенки рассогласование расчетных и экспериментальных данных по интенсивности турбулентности достигает 15–20 % [207].

Модели турбулентности 3-го и 4-го порядка, например, v^2–f модель, позволяют получить результаты, согласующиеся с данными прямого численного моделирования [36, 115] (расчеты проводились для течения в плоском канале при наличии однородного вдува через одну из стенок и отсоса через противоположную). Средние характеристики потока слабо зависят от флуктуаций скорости на проницаемой поверхности [115].

Результаты моделирования крупных вихрей применялись ранее для исследования устойчивости горения топлива в канале заряда [335] (для замыкания фильтрованных по пространству уравнений Навье–Стокса использовалась модель структурной функции). Расчеты проводились для узкого диапазона параметров и коротких каналов в рамках двумерной постановки задачи, что ставит вопрос о точности полученных результатов (LES является принципиально трехмерным подходом).

5.3.2. Начальные и граничные условия. Совместим ось x прямоугольной декартовой системы координат с нижней стенкой канала, а оси y и z свяжем с его поперечным сечением (рис. 5.9). С нижней и верхней стенок канала осуществляется вдув со скоростями v_{w1} и v_{w2} соответственно.

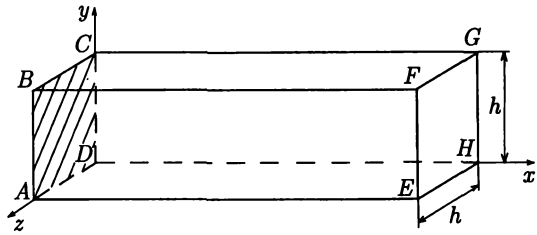


Рис. 5.9. Система координат

В начальный момент времени задаются распределения продольной и поперечной скорости, описываемые соотношениями (5.2). Скорость в направлении оси z полагается равной нулю.

На нижней и верхней стенках канала при $x \in [0, L]$ выставляются граничные условия нормального вдува ($u = w = 0$ при $y = 0$ и $y = h$, $v = v_{w1}$ при $y = 0$ и $v = -v_{w2}$ при $y = h$). Температура нижней и верхней стенки считается фиксированной ($T = T_{w1}$ при $y = 0$ и $T = T_{w2}$ при $y = h$). Левая торцевая стенка канала полагается непроницаемой и теплоизолированной ($u = v = w = 0$, $\partial T/\partial x = 0$ при $x = 0$).

На границе, через которую газ покидает расчетную область (при $x = L$), ставятся неотражающие граничные условия.

В направлении оси z задаются либо граничные условия нормального вдува (трехмерная формулировка задачи) либо периодические граничные условия — условия повторения течения (квазидвумерная формулировка).

Скорость вдува изменяется во времени по гауссовскому закону, что подтверждается данным физического эксперимента [100], но остается постоянной в пространстве

$$u' = 0, \quad v' = \alpha \langle v \rangle p_1, \quad w' = \alpha \langle w \rangle p_2.$$

где α — численный коэффициент ($\alpha \sim 0{,}2$), а p_1 и p_2 представляют собой случайные числа, выбираемые из нормального распределения вероятности, которые вычисляются в соответствии с соотношениями

$$p_1 = t_1 \cos(2\pi t_2), \quad p_2 = t_1 \sin(2\pi t_2),$$

где $t_1 = (-2 \ln t_2)^{1/2}$. Случайные числа t_1 и t_2 выбираются из равномерного распределения вероятности на интервале $[0, 1]$.

5.3.3. Параметры и сетка. В начальный момент времени параметрам потока присваиваются следующие значения: $\rho_0 = 1{,}18$ кг/м^3, $\mu_0 = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ кг/(м$\cdot$с). Температура нижней и верхней стенок канала считаются равными $T_{w1} = T_{w2} = 300$ К. В расчетах варьируются скорости вдува с нижней и верхней стенок канала. В качестве рабочей среды принимается воздух.

Ширина и длина канала выбираются равными $h = 0{,}01$ м и $l = 0{,}6$ м соответственно.

Расчеты проводились на сетке $400 \times 100 \times 50$ со сгущением узлов к переднему днищу (по координате x) и непроницаемой стенке (по координате y) канала по закону геометрической прогрессии. Минимальные и максимальные шаги сетки по координатным направлениям x и y составляли $\Delta x_{\min} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, $\Delta x_{\max} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ м, $\Delta y_{\min} = 1{,}8 \times \times 10^{-5}$ м, $\Delta y_{\max} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ м. Шаг сетки по координате z полагался либо постоянным $\Delta z = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ м (при использовании квазидвумерной формулировки задачи) либо изменялся по тому же закону, что и шаг по координате y (при использовании трехмерной постановки задачи).

Для исследования сеточной зависимости решения часть расчетов проводилась на грубой сетке, имеющей $200 \times 50 \times 25$ узлов.

Шаг по времени составлял $\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. Для достижения статистически стационарной картины течения делалось 50000 шагов по времени.

Для удобства представления результатов линейные размеры относятся к ширине канала h, продольная скорость — к максимальной скорости в сечении канала u_m, а поперечная скорость — к скорости вдува с верхней стенки v_{w2} (предполагается, что $v_{w2} \neq 0$). Безразмерное время вводится как tu_m/h, где t — физическое время. Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v_{w2} h/\mu$.

5.3.4. Результаты расчетов. Частотный спектр кинетической энергии турбулентности приведен на рис. 5.10. Линии *1* и *2* соответствуют расчетам на сетках грубой и хорошей разрешающей способности, а прямая линия — закону Колмогорова–Обухова.

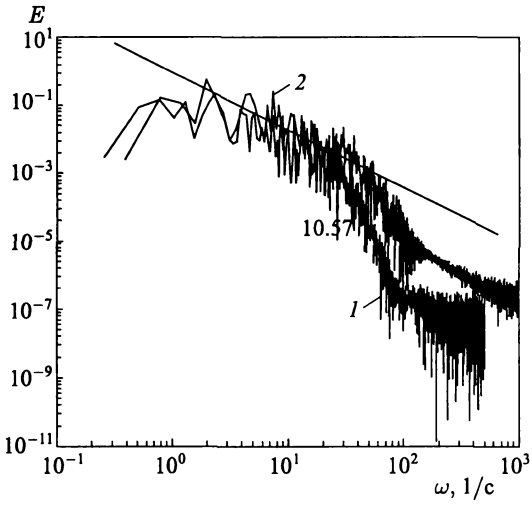


Рис. 5.10. Спектр кинетической энергии турбулентности (*1* — расчет на грубой сетке $200 \times 50 \times 25$; *2* — расчет на подробной сетке $400 \times 100 \times 50$)

Линии уровня продольной скорости, осредненные по ансамблю реализаций, приведены на рис. 5.11, а вихревая картина течения в канале с односторонним вдувом — на рис. 5.12.

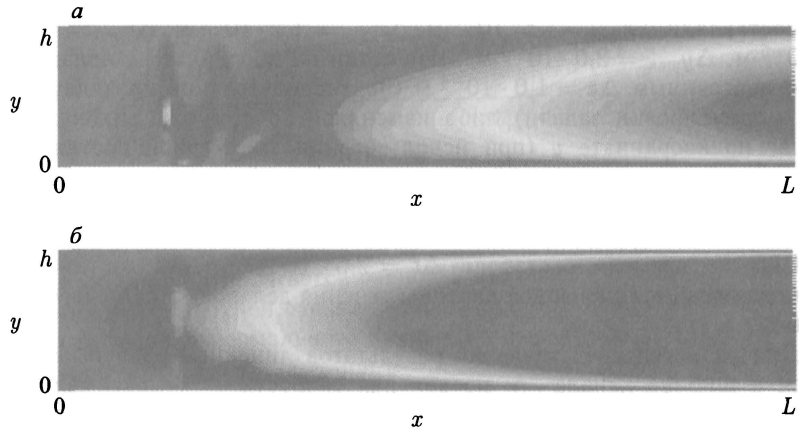


Рис. 5.11. Линии уровня продольной скорости при $v_{w1} = 0$ м/с, $v_{w2} = 2{,}75$ м/с (фрагмент *а*) и $v_{w1} = 2{,}75$ м/с, $v_{w2} = 2{,}75$ м/с (фрагмент *б*)

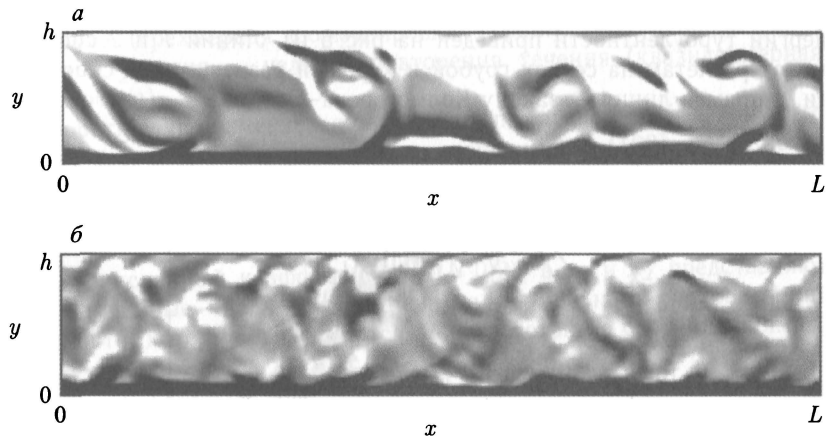


Рис. 5.12. Вихревая картина течения в канале при $v_{w1} = 0$, $v_{w2} = 1{,}0$ м/с (фрагмент *а*) и $v_{w1} = 0$, $v_{w2} = 5{,}0$ м/с (фрагмент *б*) в координатной плоскости xy

На некотором расстоянии от левой непроницаемой стенки формируются рециркуляционные зоны (при постановке на левой границе расчетной области граничных условий зеркальной симметрии течения рециркуляционные зоны отсутствуют). Увеличение скорости вдува с нижней стенки приводит к уменьшению интенсивности циркуляционного течения (рис. 5.11, *б*). При достаточно больши́х числах Рейнольдса

вязкие силы играют пренебрежимо малую роль по сравнению с силами давления при всех x, за исключением небольшой области у торцевой и непроницаемой стенки канала.

Характеристики турбулентности зависят от отношения скорости вдува к локальному значению продольной составляющей скорости $\theta = v_w/u_m$. При малых отношениях ($\theta \sim 0{,}04$) в течении доминируют мелкомасштабные вихревые структуры. При более высоких значениях параметра вдува ($\theta \sim 0{,}1$) около стенки присутствуют крупномасштабные вихри.

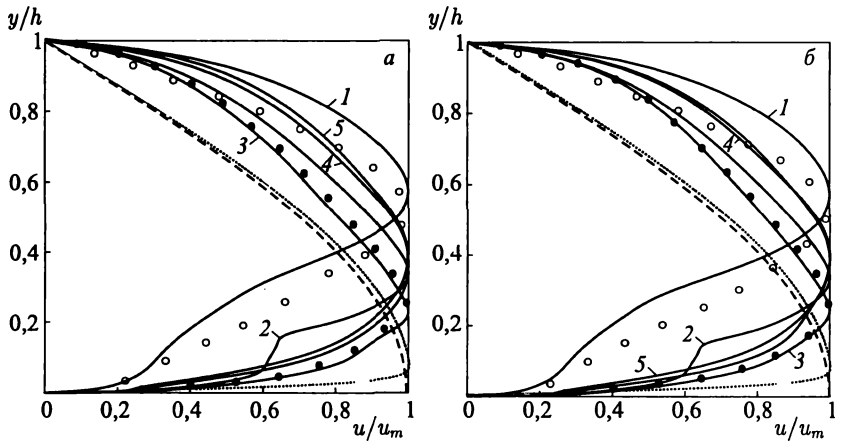


Рис. 5.13. Распределения продольной скорости при $x/h = 40$ (фрагмент *а*) и $x/h = 50$ (фрагмент *б*)

Распределения продольной скорости по поперечному сечению канала приведены на рис. 5.13. Пунктирная линия показывает косинусоидальный профиль [26, 37], имеющий место при вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости и описываемый соотношением (5.2), а штрихпунктирная линия — профиль скорости, полученный из решения уравнения (5.1) при $\mathrm{Re} = 10^3$. Распределения скорости, описываемые кривыми *1–5*, соответствуют различным скоростям вдува с верхней стенки $v_{w2} = 0{,}1$ (*1*); 0,55 (*2*); 1 (*3*); 2,75 (*4*); 5 м/с (*5*). Нижняя стенка канала полагается непроницаемой ($v_{w1} = 0$). Значки • соответствуют данным физического эксперимента [100], а значки ○ — результатам расчета по k–ε модели турбулентности при $v_{w2} = 1$ м/с (условия для кривой *3*).

По мере увеличения числа Рейнольдса максимум продольной скорости приближается к непроницаемой поверхности, вблизи которой развивается зона вязкого течения, подобная пограничному слою на плоской пластине. При высоких числах Рейнольдса четко выражена зона сингулярного влияния вязкости (через граничное условие прили-

пания) и зона вихревого течения невязкой жидкости. С увеличением расстояния от левой стенки канала профиль скорости принимает более наполненную форму, чем профиль скорости, полученный на основе k–ε модели турбулентности.

При $\mathrm{Re} > 10^3$ и двухстороннем вдуве одинаковой интенсивности ($v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с) решение становится практически независимым от числа Рейнольдса. Профиль скорости, по-прежнему, имеет более наполненную форму, чем распределение, полученное из модели вихревого течения в канале со вдувом или решения уравнений k–ε модели турбулентности (рис. 5.14, *а*).

Профили поперечной скорости при изменении интенсивности вдува сравнительно слабо отличаются друг от друга в широком диапазоне параметров задачи (рис. 5.14, *б*). Они достаточно хорошо приближаются синусоидальным распределением (5.2).

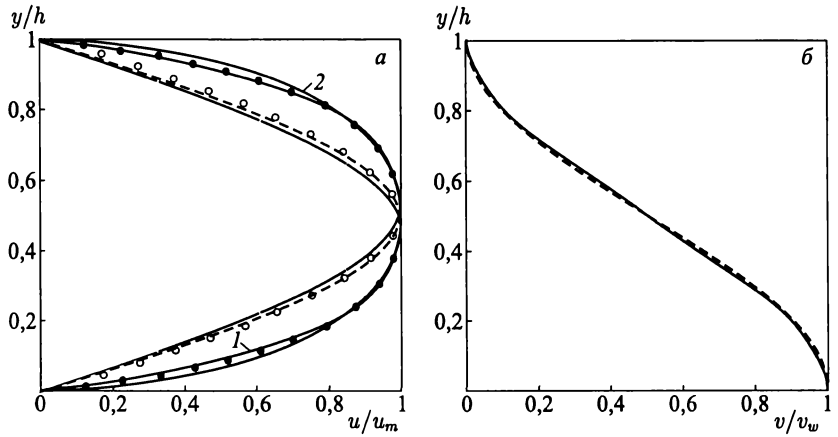


Рис. 5.14. Распределения продольной (фрагмент *а*) и поперечной (фрагмент *б*) скорости при $v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с и $x/h = 20$ (*1*); 60 (*2*)

Продольная скорость изменяется практически по линейному закону вдоль оси канала (рис. 5.15, *а*). Пунктирная линия соответствует теоретической линейной зависимости). Распределение поперечной скорости имеет достаточно универсальный характер и слабо зависит от координаты x (рис. 5.15, *б*), а начиная с сечения $x/h \sim 30$ оно становится практически не зависящим от продольной координаты. Результаты, полученные на основе k–ε модели (значки •), свидетельствуют об отклонении распределения продольной скорости от линейной зависимости при $x/h > 35$, что согласуется также с результатами [22]. Колебания поперечной скорости, имеющие место при $0{,}12 < x/L < 0{,}25$, связаны с формированием рециркуляционных зон вблизи левого непроницаемого торца канала (рис. 5.11). Формирование рециркуляционных зон связано с постановкой граничных условий прилипания на левой

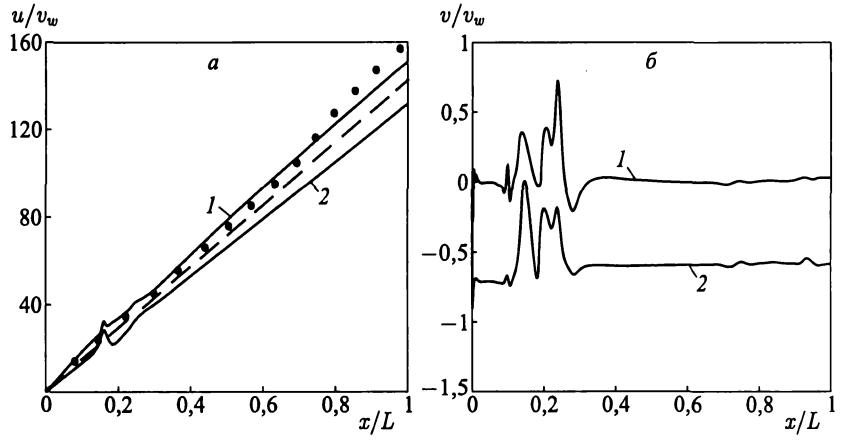


Рис. 5.15. Распределения продольной (фрагмент *а*) и поперечной (фрагмент *б*) скорости при $y/h = 0{,}5$ (*1*); 0,75 (*2*)

границе. При использовании условия зеркальной симметрии течения рециркуляционные зоны отсутствуют.

Переход ламинарного режима течения в турбулентный определяется по картине поведения коэффициента трения вдоль нижней непроницаемой поверхности канала (рис. 5.16). Коэффициент поверхностного трения находится из соотношения $C_f = 2\tau_w/(\rho U^2)$, где τ_w — напряжение поверхностного трения, U — средняя продольная скорость в поперечном сечении. Сплошные линии *1–5* соответствуют различным скоростям вдува с верхней стенки, а значки □, ○, • — расчету по k–ε модели турбулентности для условий, описываемых кривыми *2*, *3* и *4*. Сравнение полученных результатов показывает, что k–ε модель дает удовлетворительное предсказание коэффициента трения лишь при достаточно малых скоростях вдува (кривая *3*). При увеличении скорости вдува расхождение результатов возрастает по мере удаления от левой границы.

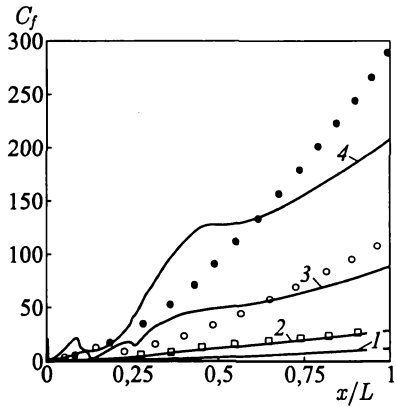


Рис. 5.16. Распределения коэффициента поверхностного трения вдоль непроницаемой стенки канала

Резкое увеличение коэффициента трения, начиная с $x/L \sim 0{,}2$, свидетельствует о ламинарно-турбулентном переходе. Положение точки перехода зависит от параметров задачи, а также оказывается достаточ-

но чувствительным к флуктуациям скорости на проницаемой стенке и при увеличении скорости вдува смещается вниз по потоку. Координата точки перехода удовлетворительно согласуется с данными [207].

На основе полученных результаты можно выделить следующие режимы течения:

— область существенного влияния сил вязкости ($x/h < 1/\mathrm{Re}$);
— ламинарное течение с косинусоидальным профилем ($1 < x/h < 5$);
— область перехода ($5 < x/h < 10 \div 15$);
— турбулентное течение ($10 \div 15 < x/h$).

Длина ламинарного участка зависит от числа Рейнольдса. С увеличением относительной амплитуды возмущений $k_m^{1/2}/u_m > 4\,\%$ координата точки перехода уменьшается.

Особенностью течения в канале с распределенным вдувом является наличие отрицательного градиента давления. Распределение давления вдоль координаты x, показанное на рис. 5.17 для $v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с, согласуется с расчетными данными [22] (значки ○), полученными на основе k–ε модели турбулентности, и данными [115] (значки •), полученными на основе v^2–f модели, и достаточно хорошо описывается параболической зависимостью, которая следует из решения (5.2). Распределения давления практически не зависят от скорости вдува. Имеющееся некоторое рассогласование полученных результатов с данными [22] объясняется влиянием сжимаемости потока при $x/h > 30$. Изменение статического давления поперек канала незначительно и им можно пренебречь.

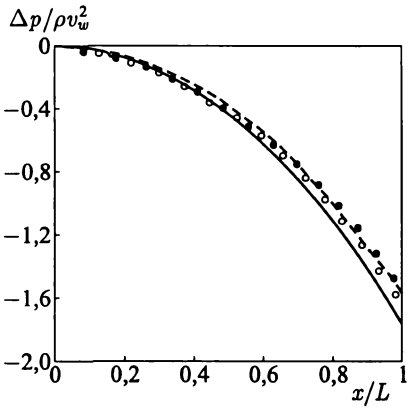


Рис. 5.17. Распределения давления в канале с двухсторонним вдувом при $y/h = 0{,}5$

Отрицательный градиент давления в канале оказывает существенное влияние на механизм и интенсивность турбулентного переноса.

С увеличением координаты x и скорости вдува происходит смещение максимума кинетической энергии от стенки в поток (рис. 5.18). Профиль кинетической энергии турбулентности имеет два максимума, расположенные вблизи стенок канала. Увеличение уровня турбулентных пульсаций скорости наблюдается в области сильного сдвига на некотором расстоянии от проницаемой стенки канала, где жидкие частицы, движущиеся по нормали к поверхности, вынуждены развернуться в узкой приповерхностной зоне. Величина максимума, распо-

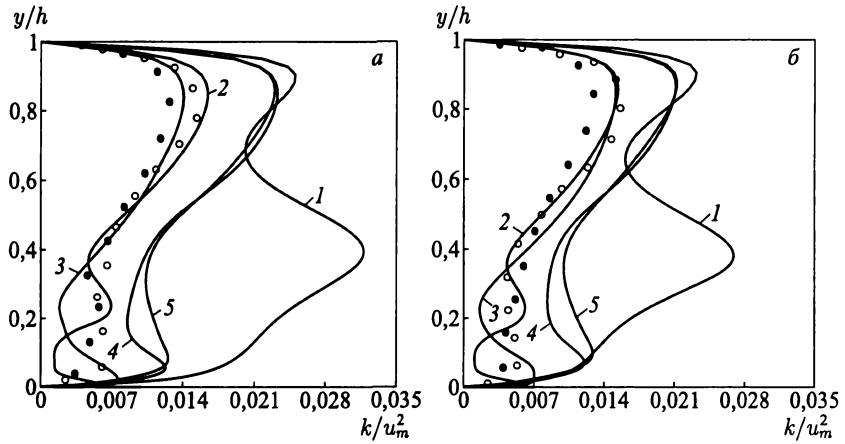


Рис. 5.18. Распределения кинетической энергии турбулентности при $x/h = 40$ (фрагмент *а*) и $x/h = 50$ (фрагмент *б*)

ложенного в окрестности непроницаемой стенки, существенно меньше (почти в 2 раза). Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными физического эксперимента [100] (значки •), исключая пристеночные зоны потока, где расчет переоценивает интенсивность турбулентности [207]. В случае двухстороннего вдува генерации кинетической энергии турбулентности в центральной части канала не происходит, и ее уровень незначителен.

Расчеты по k–ε модели (значки ○) предсказывают положение максимума кинетической энергии турбулентности на большем расстоянии от проницаемой поверхности канала [22], а также переоценивают уровень турбулентности вблизи его стенок по сравнению с данными измерений и результатами DNS [100, 207].

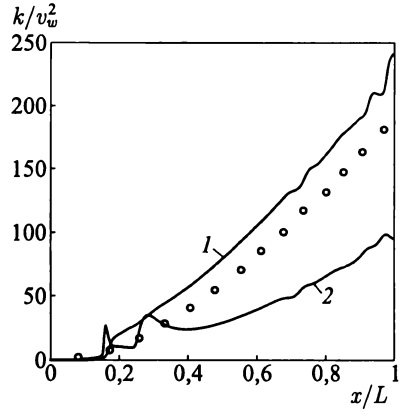


Рис. 5.19. Распределения кинетической энергии турбулентности при $y/h = 0{,}5$ (*1*); 0,75 (*2*)

В случае двухстороннего вдува распределение кинетической энергии вдоль координаты x удовлетворительно описывается параболической зависимостью (рис. 5.19, значки ○ соответствуют k–ε модели), а скорости ее диссипации — кубической зависимостью. Указанные зависимости успешно использовались ранее для построения приближенной модели турбулентного

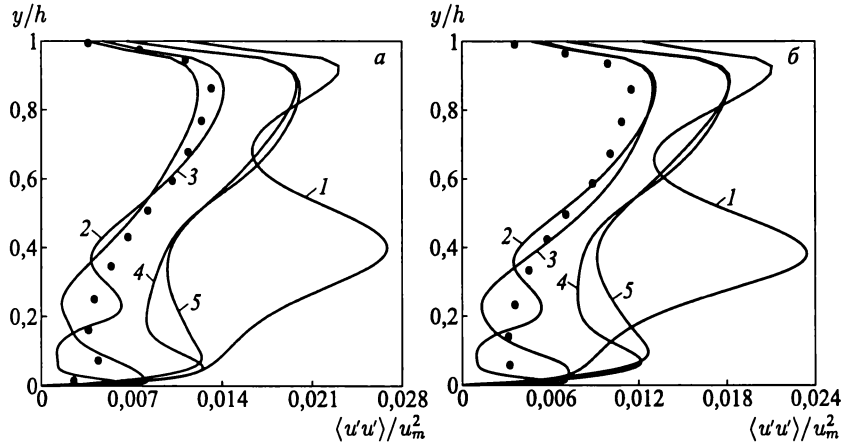


Рис. 5.20. Распределения рейнольдсовых напряжений $\langle u'u' \rangle$ при $x/h = 40$ (фрагмент *а*) и $x/h = 50$ (фрагмент *б*)

течения в канале со вдувом, имеющем произвольную форму поперечного сечения в плане [22]. Увеличение генерации кинетической энергии турбулентности при $x/L \sim 0{,}2$ соответствует точке перехода.

Интенсивность турбулентности в канале с проницаемыми стенками имеет такой же порядок, что и уровень турбулентности полностью развитого турбулентного течения в канале, когда вязкие и рейнольдсовые напряжения находятся в равновесии с напряжениями, обусловленными давлением.

Рассчитанные распределения компонент тензора рейнольдсовых напряжений в поперечном сечении показаны на рис. 5.20–5.22. Полученные результаты согласуются с данными [100] (значки • соответствующие условиям кривой *3*).

Вклад пульсаций продольной и поперечной скорости в баланс кинетической энергии турбулентности примерно одинаков (средний клад пульсаций скорости в направлении оси z равняется нулю). Распределения нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u'u' \rangle$ и $\langle v'v' \rangle$ в качественном отношении практически не отличается от распределения кинетической энергии турбулентности (рис. 5.16), в то время как профили касательных компонент $\langle u'v' \rangle$ меняют знак при переходе через серединную линию канала.

Сравнение результатов численного моделирования с расчетами, проведенными на основе k–ε модели [22], и данными физического эксперимента показывает, что метод моделирования крупных вихрей предсказывает более наполненный профиль продольной скорости по сравнению с решением, полученным на основе модели вихревого течения невязкой жидкости или k–ε модели. При этом максимум кинетической энергии турбулентности располагается ближе к проницаемой поверх-

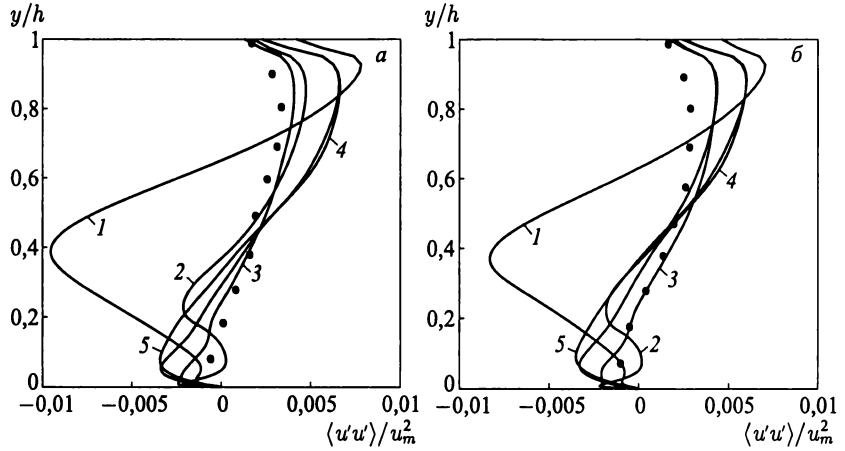


Рис. 5.21. Распределения рейнольдсовых напряжений $\langle u'v' \rangle$ при $x/h = 40$ (фрагмент *а*) и $x/h = 50$ (фрагмент *б*)

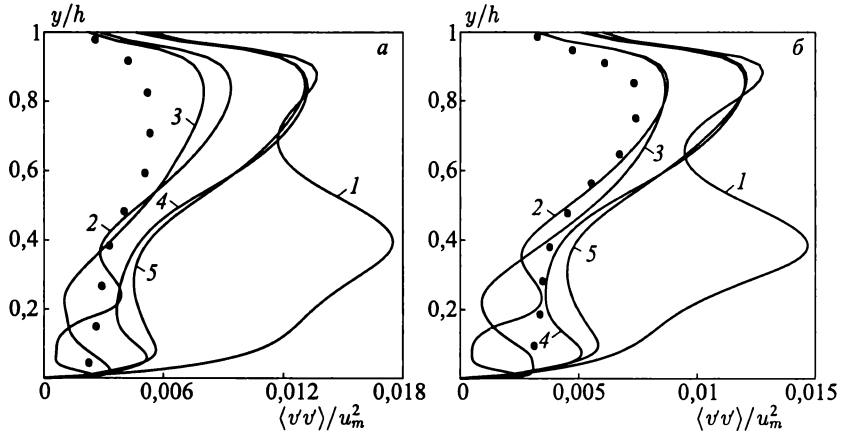


Рис. 5.22. Распределения рейнольдсовых напряжений $\langle v'v' \rangle$ при $x/h = 40$ (фрагмент *а*) и $x/h = 50$ (фрагмент *б*)

ности канала, чем это предсказывает k–ε модель [22, 23]. В случае двухстороннего вдува распределения характеристик потока становятся практически не зависящими от числа Рейнольдса, но и при этом имеют более наполненный профиль скорости.

Результаты численного моделирования течения в канала с двухсторонним вдувом имеют хорошее согласование с данными, полученными при помощи пакета Star-CD [2, 20] (для расчетов использовалась стандартная k–ε модель турбулентности).

Разработанные средства численной диагностики и полученные результаты являются основой для моделирования движения частиц кон-

денсированной фазы в турбулентном потоке, их инерционной сепарации и межфазного взаимодействия (при помощи дискретно-траекторного метода пробных частиц).

5.4. Течение в свободном слое смешения

Проводится сравнение точности и вычислительной эффективности ряда моделей подсеточной вихревой вязкости (модели Смагоринского, RNG-модели, динамической модели и однопараметрической модели) применительно к свободному слою смешения. Обсуждаются способы постановки нестационарных граничных условий на входе в расчетную область и построение расчетной сетки.

5.4.1. Приближенные решения. Интерес к изучению турбулентных слоев смешения обусловлен как их широким распространением в технических устройствах типа эжекторов и камер смешения, так и поиском способов управления процессами смешения в сдвиговых потоках.

Полностью развитое турбулентное течение в слое смешение является автомодельным с линейным ростом толщины зоны смешения. Ширина области турбулентного перемешивания обычно представляется в виде

$$L = \frac{1}{2}\,\alpha_u f\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)|u_1 - u_2|\,t,$$

где α_u — константа ($\alpha_u \sim 0{,}38$); t — время взаимодействия потоков; f — функция, определяющая зависимость ширины зоны смешения от перепада плотности.

На практике для изучения течения в слое смешения используется замена переменной $x = u_c t$ (пространственная задача трансформируется во временну́ю). Ширина области перемешивания записывается в виде

$$L = \frac{1}{2}\,\alpha_u f\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)|u_1 - u_2|\,\frac{x}{u_c},$$

где u_c — характерная скорость, связывающая между собой пространственную и временну́ю постановки задачи.

Имеются различные способы определения эффективной скорости [87], в частности

$$u_c = \frac{1}{2}\,(u_1 + u_2);$$

$$u_c = \frac{1}{2}\,(u_1 + u_2)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right)^2\right]^{1/2};$$

$$u_c = \frac{1}{2}\,(u_1 + u_2)\left[1 + \frac{8}{15\pi}\left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right)^2\right].$$

При смешении потоков разной плотности используется соотношение

$$u_c = \frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

При больших перепадах плотности смешивающихся веществ предпочтительным является интегральное определение эффективной скорости

$$u_c = \int_{y_1}^{y_2} \rho u \, dy \Big/ \int_{y_1}^{y_2} \rho \, dy,$$

где y_1, y_2 — границы зоны перемешивания.

На основе обработки результатов измерений [73] показана неприменимость гипотезы Тэйлора в трехмерном случае для перехода от временной к пространственной постановке задачи [213].

В [68] результаты расчетов на основе ряда нелинейных моделей турбулентности сравниваются с данными, полученными при помощи k–ε модели и модели переноса рейнольдсовых напряжений. Результаты тестирования показывают, что при расчете сдвиговых течений нелинейные модели оказываются более чувствительными к эффектам кривизны линий тока.

Постановка граничных условий на входе в расчетную область производится на основе расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине [112, 219]. Для сокращения вычислительных затрат применяется приближенный метод расчета пограничного слоя типа метода Кармана–Польгаузена [315].

В работах [211, 334] рассматривается эволюция во времени слоя смешения — в продольном направлении выставляются периодические граничные условия. Такой подход позволяет сэкономить вычислительные ресурсы, но не учитывает расхождение линий тока и пространственную неоднородность потока.

Моделирование пространственной эволюции слоя смешения проводится в [215, 302, 340]. Отмечается необходимость учета трехмерности течения при увеличении эффективного числа Маха на входе [148, 169]. Решение задачи в двумерной постановке приводит к переоценке интенсивности пульсаций скорости и уровня сдвиговых напряжений [220].

5.4.2. Начальные и граничные условия. Рассмотрим два полубесконечных потока газа, движущихся в одном направлении со скоростями u_1 и u_2 друг относительно друга вдоль плоскости $x < 0$, $y = 0$. В точке $x = 0$ потоки соприкасаются, и далее (при $x > 0$) граница между ними турбулизируется (рис. 5.23).

В качестве начальных условий в момент времени $t = 0$ задается распределение продольной скорости, описываемое соотношением [220]

$$u(y) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{th}\left[\frac{y}{2\delta_m(0)}\right].$$

Под $\delta_m(0)$ понимается толщина потери импульса в точке $x = 0$.

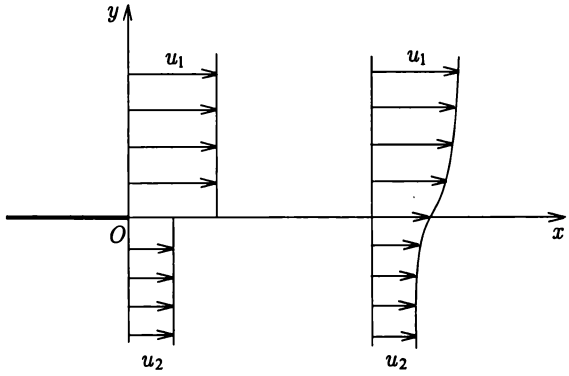


Рис. 5.23. Течение в слое смешения

Для постановки граничных условий во входном сечении необходимо задать профили скорости и других характеристик потока, полученные на основе расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине (при том же самом сеточном разрешении). Поскольку такой подход представляется достаточно трудоемким с вычислительной точки зрения, применяются другие способы постановки нестационарных граничных условий во входном сечении.

1. В начальный момент времени граница раздела потоков возмущается случайным образом с некоторой амплитудой. Поперечная составляющая скорости принудительно изменяется по закону

$$v = v_a \sin \omega t,$$

где v_a — амплитуда возмущений, ω — их частота (в расчетах $v_a \sim$ ~ 2 м/с, $\omega \sim 400$ рад/с).

2. Во входном сечении задаются равномерные профили скорости, плотности и давления, на которые накладываются случайные возмущения с заданной амплитудой (белый шум). Среднеквадратическая величина возмущений выбирается в диапазоне $0 \div 8\,\%$ от эффективной скорости u_c.

На выходе из расчетной области в направлении оси x для всех искомых функций выставляются неотражающие граничные условия.

На верхней и нижней границах расчетной области в направлении оси y задаются условия скольжения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

На боковых границах расчетной области в направлении оси z используются периодические граничные условия.

5.4.3. Параметры и сетка. Течение в свободном слое смешения характеризуется следующими параметрами:

— разность скоростей смешивающихся потоков

$$\Delta u = u_2 - u_1;$$

— эффективное число Маха

$$\mathrm{M}_c = \frac{u_1 - u_2}{a_1 + a_2};$$

— толщина потери импульса

$$\delta_m(x) = \frac{1}{(\Delta u)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(u - u_1)\,(u_2 - u)\,dy;$$

— числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\Delta u \delta_{m0}}{\nu}, \quad \mathrm{Re}_c = \frac{u_c \delta_{m0}}{\nu}.$$

Вместо δ_m используется также толщина потери завихренности [315]

$$\delta_\omega(x) = \frac{(u_{\max} - u_{\min})}{\max\limits_y (\partial u / \partial y)}.$$

При этом число Рейнольдса вычисляется следующим образом

$$\mathrm{Re}_\omega = \frac{\Delta u \delta_{\omega 0}}{\nu}, \quad \delta_{\omega 0} = \left(\frac{\Delta u}{\partial u / \partial y} \right)_{x=0}.$$

Для сравнения результатов численного моделирования с данными физического эксперимента вводятся избыточная скорость и преобразованная поперечная координата

$$\Delta u(\xi) = \frac{u(\xi) - u_2}{u_1 - u_2} \in [0, 1], \quad \xi = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \in [0, 1].$$

Исходные профили скорости пересчитываются в зависимости от координаты ξ для всех x, а затем усредняются по координате x.

Параметрам потока в сечении $x = 0$ присваивались следующие значения: $\rho = 1{,}18$ кг/м^3, $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $u_1 = 78$ м/с, $u_2 = 200$ м/с. Для рабочей среды принимались следующие параметры: $\gamma = 1{,}4$, $R = 287{,}1$ Дж/(кг$\cdot$К), $c_p = 1004{,}85$ Дж/(кг$\cdot$К), $\mu = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ Па$\cdot$с, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{sgs}} = 0{,}8$. При данных параметрах $\delta_{\omega 0} = 0{,}021$ м и $\mathrm{Re}_\omega = 21600$, что соответствует области полностью развитого турбулентного течения.

Сгущение узлов производится у края пластины, вблизи плоскости раздела потоков и около внешних границ расчетной области. Координаты узлов сетки в направлении оси y находятся из соотношения [220]

$$y = \begin{cases} \Delta y_0 \left(a^{j-1} - 1\right) / (a - 1) & \text{при} \quad j \leqslant j_p, \\ y_p + \Delta y_p \left(b^{j - j_p}\right) / (b - 1) & \text{при} \quad j > j_p, \end{cases}$$

где $j = 1, 2, \ldots, N$. Узел y_p располагается на границе между внутренней и внешней подобластями и имеет индекс

$$j_p = 1 + \ln\left[1 + y_p(a-1)/\Delta y_0\right] / \ln a.$$

При этом $\Delta y_p = \Delta y_0 a^{j_p - 1}$. Величины a и b определяют сгущение узлов сетки при $y < y_p$ и $y > y_p$ соответственно, имея смысл отношения шагов сетки $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j$. Максимальное отношение сторон ячеек равняется

$$A_m = \frac{\max\limits_{j=0,\ldots,N} \Delta y_j}{\min\limits_{j=0,\ldots,N} \Delta y_j} = \frac{\Delta y_N}{\Delta y_0}.$$

В расчетах $\Delta x = 0{,}25$, $y_p/L_y = 0{,}125$, $\Delta y_0 = 0{,}12$, $a = 1{,}0$, $b = 1{,}02$, $A_m = 4{,}8$.

Функция растяжения применяется к узлам, расположенным выше плоскости раздела потоков, вплоть до верхней границы расчетной области. Полученное распределение узлов затем зеркально отражается от плоскости раздела потоков.

Расчеты проводились на сетке $500 \times 80 \times 80$. Расчетная область имеет длину $25\delta_{\omega 0}$ и ширину $6\delta_{\omega 0}$ (координата y изменяется от $-3\delta_{\omega 0}$ до $+3\delta_{\omega 0}$). В направлении оси z протяженность расчетной области составляет $5\delta_{\omega 0}$ (используются периодические граничные условия). Сгущение узлов сетки производится таким образом, чтобы вблизи линии раздела потоков ширина фильтра приблизительно имела порядок тэйлоровского микромасштаба длины.

Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ с. Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делалось 50 000 шагов по времени.

5.4.4. Результаты расчетов. Профили продольной скорости, полученные при помощи различных моделей подсеточной вязкости, приведены на рис. 5.24. Значки ○ соответствуют модели Смагоринского, △ — RNG-модели, • — динамической модели, □ — дифференциальной модели вихревой вязкости. Сплошная линия показывает теоретический профиль скорости.

Модель Смагоринского приводит к менее наполненному профилю скорости, в то время как RNG-модель и динамическая модель имеют приблизительно одинаковую точность. Дифференциальная модель подсеточной вязкости дает некоторую погрешность в низкоскоростной области слоя смешения.

Влияние особенностей постановки граничных условий во входном сечении расчетной области иллюстрирует рис. 5.25 (для расчетов используется RNG-модель вихревой вязкости), где σ_u — среднеквадратическая величина продольной составляющей скорости. Сплошные линии соответствуют результатам расчетов, полученным при использовании равномерного профиля скорости во входном сечении, на который накладываются случайные возмущения с заданной амплитудой (белый шум),

а значки • — результатам расчетов, полученным при установке в точке $x = 0$ вибратора, возмущающего профиль скорости по синусоидальному закону.

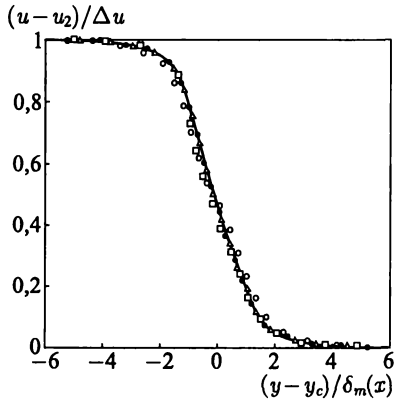


Рис. 5.24. Профили продольной скорости и сравнение моделей подсеточной вязкости

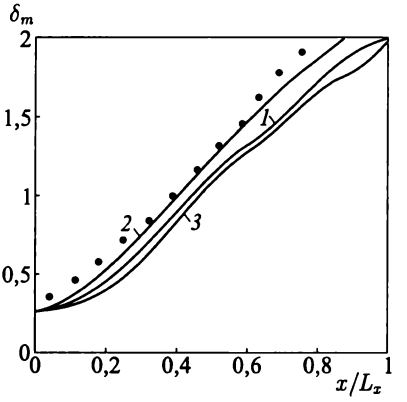


Рис. 5.25. Изменение толщины потери импульса вдоль координаты x в зависимости от формулировки граничных условий во входном сечении при $\sigma_u/u_c = 0{,}01$ (*1*); 0,03 (*2*); 0,08 (*3*)

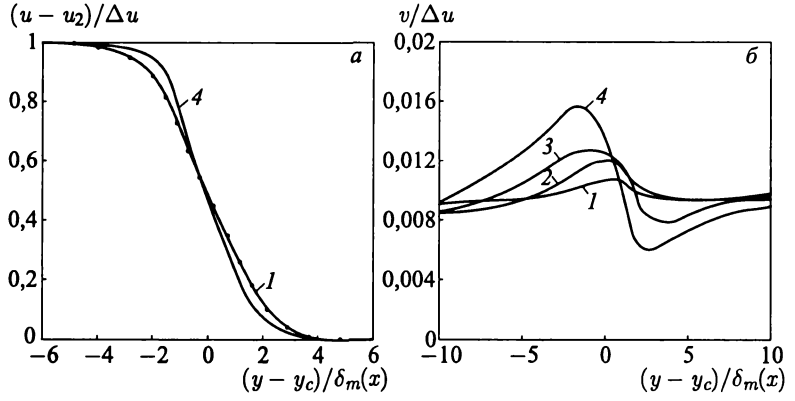


Рис. 5.26. Профили продольной (фрагмент *а*) и поперечной (фрагмент *б*) скорости при $M_c = 0{,}2$ (*1*); 0,4 (*2*); 0,6 (*3*); 0,8 (*4*). Значки • соответствуют расчетным данным [148]

При изменении числа Маха профили продольной и поперечной скорости достаточно хорошо описываются универсальными зависимостями (рис. 5.26). Профили продольной скорости, рассчитанные в различных сечениях по координате x при фиксированном числе Маха на входе, практически ложатся друг на друга в преобразованных координатах.

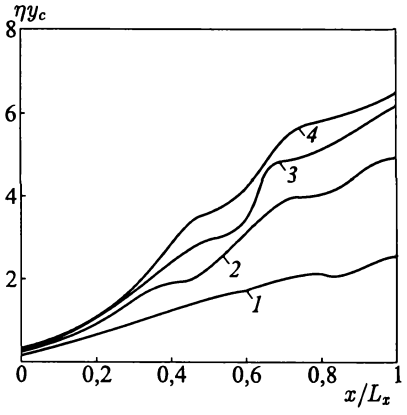


Рис. 5.27. Зависимость положения разделительной линии тока от эффективного числа Маха при $M_c = 0{,}2$ (*1*); 0,4 (*2*); 0,6 (*3*); 0,8 (*4*)

Центральная линия тока, характеризуемая координатой y_c такой, что $u(y = y_c) = u_c$, при увеличении M_c перемещается в область низкоскоростного течения (рис. 5.27).

Распределения интенсивности пульсаций продольной и поперечной скорости, а также распределения сдвиговых напряжений и коэффициента асимметрии $s_u = \langle u'^3 \rangle / \sigma_u^3$ показаны на рис. 5.28 и рис. 5.29 при $M_c = 0{,}42$.

Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными физического эксперимента [169] (результаты измерений получены при $M_c = 0{,}46$), за исключением распределения пульсаций поперечной скорости (рис. 5.30, *б*). Вместе с тем, результаты измерений дают более низкий уровень интенсивности пульсаций поперечной скорости. Следует отметить, что подобный эффект (переоценка уровня пульсаций поперечной скорости) наблюдается в [302] и объясняется переходом энергии от мелкомасштабных вихрей к крупномасштабным. В работе [148] отмечается, что переоценка уровня пульсаций имеет место при использовании различных подсеточных моделей вихревой вязкости.

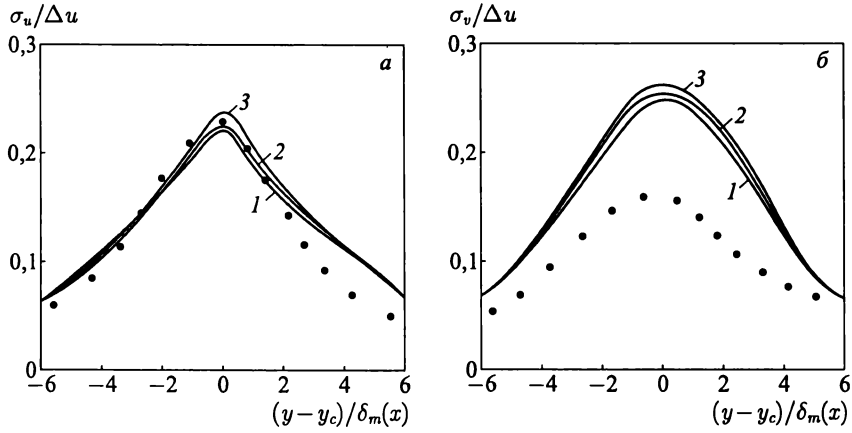


Рис. 5.28. Распределения интенсивности пульсаций продольной (фрагмент *а*) и поперечной (фрагмент *б*) скорости в сравнении с экспериментальными данными [169] (значки •) при $x/L_x = 0{,}6$ (*1*); 0,7 (*2*); 0,8 (*3*)

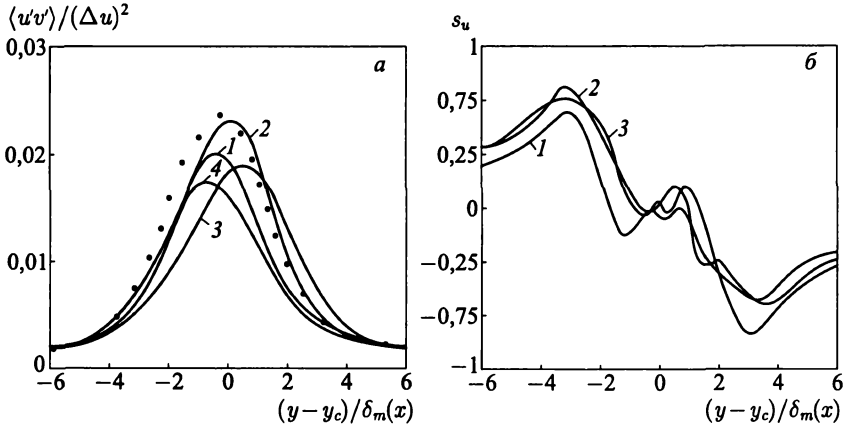


Рис. 5.29. Распределения сдвиговых напряжений (фрагмент *а*) и коэффициента асимметрии (фрагмент *б*) в сравнении с экспериментальными данными [169] (значки •) при $x/L_x = 0{,}6$ (*1*); 0,7 (*2*); 0,8 (*3*); 0,9 (*4*)

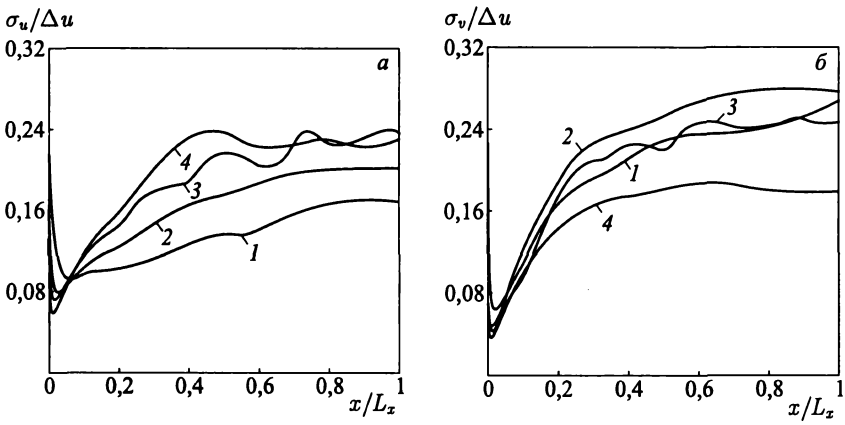


Рис. 5.30. Распределения максимального уровня пульсаций продольной (фрагмент *а*) и поперечной (фрагмент *б*) скорости вдоль координаты x при $M_c = 0{,}2$ (*1*); 0,4 (*2*); 0,6 (*3*); 0,8 (*4*)

При переходе через серединную линию тока коэффициент асимметрии изменяет знак. Локальные экстремумы имеют место при $y = \pm 2\delta_m$ и $y = \pm 6\delta_m$. Результаты расчетов качественно согласуются с данными [148], за исключением границ зоны смешения, что объясняется влиянием начальных возмущений продольной составляющей скорости.

Изменение интенсивности пульсаций продольной и поперечной скорости вдоль координаты x показано на рис. 5.30.

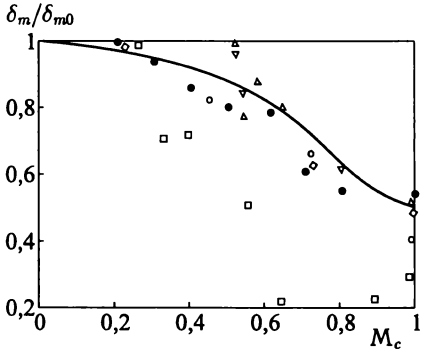


Рис. 5.31. Зависимость толщины потери импульса от числа Маха. Значки • соответствуют результатам расчета, □ — [262], △, ▽, ◇ — [148], ○ — [169]

Толщина потери импульса уменьшается при увеличении эффективного числа Маха (рис. 5.31), что согласуется с данными [148, 169, 262].

Полученные результаты свидетельствуют о нечувствительности расчетных данных к способу постановки нестационарных граничных условий во входном сечении (рассматриваются возмущения в виде белого шума и синусоидальных возмущений, накладываемых на профиль средней скорости). При этом возмущения в виде белого шума, наложенные на профиль средней скорости, достаточно хорошо воспроизводят картину развития потока во времени и в пространстве.

5.5. Течение в затопленной круглой струе

Проводится моделирование крупных вихрей дозвуковой неизотермической турбулентной струи, истекающей из круглого сопла в затопленное пространство. Расчеты проводятся для различных значений степени подогрева струи. Обработка результатов позволяет получить распределения корреляционных моментов пульсаций плотности, скорости и температуры, в том числе и моментов высшего порядка, вдоль оси и в поперечных сечениях струйного потока. Результаты расчетов сравниваются с имеющимися расчетными данными и данными физического эксперимента.

5.5.1. Имеющиеся решения. Физическому и математическому моделированию дозвуковых турбулентных струй уделяется большое внимание в литературе.

Характеристики неизотермических струй измеряются в [25] (пульсации продольной скорости в струях с малыми степенями подогрева, $0{,}02 \leqslant M \leqslant 0{,}96$, $10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 5{,}9 \cdot 10^5$), [58] (влияние условий истечения на распределения скорости и температуры), [105] (пульсации скорости и температуры и их корреляции), [88] (корреляционные моменты скорости и температуры), [109] (распределения рейнольдсовых напряжений, турбулентный перенос тепла и число Прандтля, $\mathrm{Re} = 1{,}7 \times \times 10^4$), [141] (распределение концентрации безынерционной примеси, $5 \cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 4 \cdot 10^4$), [261] (корреляции скорости и концентрации, $\mathrm{Re} = 1{,}1 \cdot 10^4$), [266] (влияние степени подогрева на корреляции скорости и температуры). Широкий спектр работ связан с исследованием

влияния степени подогрева на турбулентную структуру струйного потока, в частности, [32] ($M = 0{,}24$, $2{,}3 \cdot 10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10^5$, $1 \leqslant \vartheta \leqslant 2{,}2$), [212] ($0{,}32 \leqslant M \leqslant 1{,}02$, $3{,}45 \cdot 10^5 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 1{,}07 \cdot 10^6$, $2{,}32 \leqslant \vartheta \leqslant 4$), [39] ($M = 0{,}22$, $10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 1{,}7 \cdot 10^4$, $2{,}6 \leqslant \vartheta \leqslant 5$). В работе [212] получены результаты, подтверждающие данные [39] в части увеличения пульсаций скорости с ростом степени подогрева потока. Следует отметить, что в [32] получены иные результаты, отличающиеся от [39] как в качественном, так и количественном отношении.

Приближенные подходы основаны на полуэмпирической теории свободной турбулентности Прандтля или Тэйлора и разбиении области течения на начальный и основной участки, а также предположении о локальном подобии распределений избыточного импульса и избыточного теплосодержания в поперечных сечениях струи. Для расчетов находит применение метод эквивалентной задачи теории теплопроводности, который не имеет строгого обоснования, но позволяет решить задачу о непрерывной деформации профиля скорости в затопленной струе, истекающей из сопла конечных размеров с произвольным начальным распределением скорости. В других подходах используются интегральные условия сохранения нулевых и высших моментов [25].

Для численных расчетов используются различные модели турбулентности, в частности, модель пути смешения, k–ε модель [57, 158], модель k–ε–$\langle T'^2 \rangle$ [76, 174], а также уравнения переноса рейнольдсовых напряжений. Расчеты по k–ε модели турбулентности хорошо согласуются с данными измерений по распределению скорости, но дают завышенные значения кинетической энергии турбулентности и степени расширения струи.

Одна из особенностей свободных сдвиговых течений состоит в наличии в слое смешения крупномасштабных вихревых образований. Управление когерентными структурами путем их усиления или разрушения предоставляет широкие возможности для эффективного воздействия на процессы переноса и теплообмена [6].

Прямое численное моделирование и моделирование крупных вихрей течения в затопленной струе проводится в [151] ($\mathrm{Re} = 3{,}6 \cdot 10^3$), [345] ($\mathrm{Re} = 10^4$), [33] ($\mathrm{Re} = 2{,}0 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Re} = 10^4$), [282] ($\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^3$), [28] ($\mathrm{Re} = 2{,}5 \cdot 10^4$), [75] ($M = 0{,}9$, $\mathrm{Re} = 3{,}6 \cdot 10^4$), [177] ($\mathrm{Re} = 6 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Re} = 10^5$), [239] ($\mathrm{Re} = 7{,}6 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Re} = 2{,}76 \cdot 10^4$), [295] ($M = 0{,}9$, $\mathrm{Re} = 10^4$), [321] ($M = 0{,}9$, $\mathrm{Re} = 10^4$), [77] ($M = 0{,}9$, $2{,}5 \cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 4 \cdot 10^5$).

В качестве подсеточной модели используется модель Смагоринского [28, 239, 345], модель структурной функции [282], которая при определенных условиях сводится к модели Смагоринского, а также динамическая модель [75, 177, 239] и модель подобных масштабов [345]. Сравнение результатов расчетов с данными измерений показывает, что модель Смагоринского недооценивает интенсивность турбулентности в зоне смешения [345]. Рассогласование расчетных и экспериментальных данных объясняется перемежаемостью течения и обратным переходом энергии — от мелких вихрей к крупным (в отличие от модели

подобных масштабов, модель Смагоринского не учитывает обратный переход энергии). В [33] под прямым численным моделированием понимаются подходы, в которых вихревая вязкость зависит от шага разностной сетки. В [28] основное внимание уделяется процессам формирования слоя смешения на начальном участке струи и его развитию вниз по потоку, а также влиянию величины коэффициента Смагоринского на характеристики струи.

В [295, 321] расчеты проводятся на грубой сетке без использования подсеточной модели, а диссипативный механизм вводится разностной схемой (подход MILES). Результаты [77] демонстрируют перспективность подхода, основанного на явной фильтрации уравнений Навье–Стокса и приближенной декомпозиции поля скорости. Данные расчетов используются для нахождения звукового поля струи [75, 295, 321], а также изучения способов внешнего воздействия на структуру струи и интенсификацию турбулентного перемешивания [177]. В ряде работ, например в [345], используется осесимметричная постановка задачи, что противоречит идеологии моделирования крупных вихрей, который является принципиально трехмерным подходом. Сравнительно узкий диапазон работ посвящен исследованию характеристик потока в ближнем поле течения струи (при $x/r_a < 50$).

5.5.2. Начальные и граничные условия. Рассмотрим турбулентную струю нагретого газа, истекающую из круглого сопла в затопленное пространство. Начало системы координат располагается на срезе сопла. Положительный отсчет координаты x ведется в сторону распространения струи. В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины принимается радиус выходного сечения сопла r_a, а для переменных с размерностью скорости и температуры — скорость u_a и температура T_a газа на срезе сопла. Окружающая среда имеет температуру T_∞. Течение в струе характеризуется параметром подогрева $\vartheta = T_a/T_\infty$ (для изотермической струи $\vartheta = 1$) и степенью турбулентности на срезе сопла $\theta = u'/u_a$, где u' — пульсационная составляющая скорости.

Для постановки граничных условий и обработки результатов расчетов вместо декартовой системы координат (x, y, z) используется цилиндрическая система координат (x, r, θ). Радиальная и касательная составляющие скорости связаны с декартовыми составляющими скорости при помощи соотношений

$$v_r = \frac{v_y y + v_z z}{(y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad v_\theta = \frac{v_z y - v_y z}{(y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

В связи с симметрией расчетной области и граничных условий, среднее по времени значение окружной скорости равняется нулю.

Распространение струи зависит от значений чисел Рейнольдса и Маха, степени подогрева, уровня турбулентности на срезе сопла и других условий, в частности, неравномерности профиля скорости,

связанной с наличием пограничного слоя, нарастающего на внутренней стенке сопла, и влиянием спутного потока на развитие пограничного слоя на внешней поверхности сопла. Начальные условия истечения оказывают слабое влияние при достаточно высоких числах Рейнольдса (при $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^4$), умеренных числах Маха и начальном уровне турбулентности в струе, не превышающем $3 \div 4\,\%$ [266].

Входная граница расчетной области совпадает со срезом сопла ($x = 0$), и для скорости на ней ставятся граничные условия вида

$$v_x(r) = \begin{cases} u_a(r) & \text{при} \quad |r| \leqslant r_a, \\ 0 & \text{при} \quad |r| > r_a. \end{cases}$$

На части границы, совпадающей с выходным сечением сопла (при $|r| \leqslant r_a$), фиксируются распределения скорости и температуры. Производная от статического давления по нормали к границе принимается равной нулю.

Корректная постановка граничных условий требует расчета течения в трубе и пограничном слое на внешней поверхности сопла [239, 321] (часть сопла включается в расчетную область). В связи с трудоемкостью этой задачи, расчет течения в трубе не проводится, а на срезе сопла задается профиль скорости, на который накладываются случайные синусоидальные возмущения [75]

$$v_x(r,t) = \frac{u_a}{3}\left[1 + \mathrm{th}\left(\frac{0{,}5 - |r|}{2\delta}\right)\right][1 + \alpha \sin(\mathrm{Sh}\, t)],$$

где u_a — скорость на оси струи, δ — толщина потери импульса (полагается, что $\delta/r_a \sim 0{,}1$). Под $\mathrm{Sh} = 2r_a f/u_a$ понимается число Струхаля (f — частота возмущений), а под α — амплитуда возмущений (в расчетах $\mathrm{Sh} = 0{,}42$ и $\alpha = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$). Малые случайные возмущения накладываются также на радиальное распределение касательной скорости

$$v_\theta(r,t) = 0{,}025 \exp\left[-3(1 - |r|)^2\right] \phi,$$

где ϕ — случайное число из равномерного распределения на $[-0{,}5; 0{,}5]$. Радиальная скорость на срезе сопла равняется нулю $v_r(r,t) = 0$.

Граничные условия вдали от струи, истекающей в затопленное пространство, определяются эжектирующими свойствами струи — вдали от струи существует индуцированное потенциальное течение, направленное к струе. Свойства и параметры этого течения заранее неизвестны и определяются самой струей. Расчеты стационарных течений показывают, что наилучшие результаты дают граничные условия, основанные на точном решении, описывающем потенциальное течение вне круглой турбулентной струи [33].

На границах, через которые газ покидает расчетную область, для искомых переменных используются неотражающие граничные условия (условия конвективного переноса).

5.5.3. Параметры и сетка. Расчеты проводятся для различных значений степени подогрева и двух видов струй. В одном случае струя нагретого газа истекает в холодную окружающую среду ($\vartheta > 1$), а в другом — холодная струя истекает в поток нагретого газа ($\vartheta < 1$).

Начальные параметры следующие: $r_a = 5$ мм, $u_a = 80$ м/с, $\rho_a = 0{,}58 \div 1{,}26$ кг/м^3, $T_a = 280 \div 600$ К, $\rho_\infty = 0{,}58 \div 1{,}26$ кг/м^3, $T_\infty = 280 \div 600$ К. Параметры на срезе сопла соответствуют числу Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1{,}2 \cdot 10^5$ (число Рейнольдса поддерживается постоянным за счет надлежащего изменения динамической вязкости) и интервалу изменения степени подогрева $\vartheta = 0{,}48 \div 2{,}15$.

Расчеты проводятся в области $[0, L_x] \times [-L_y, L_y] \times [-L_z, L_z]$. Длина расчетной области составляет $L_x = 100 r_a$. Ее ширина и высота во входном и выходном сечении полагаются равными $L_y = L_z = 10 r_a$ и $L_y = L_z = 40 r_a$ соответственно (расчетная область имеет вид усеченной пирамиды).

Расчетная сетка содержит $350 \times 150 \times 150 = 7\,875\,000$ ячеек. На начальном участке струи шаг по переменной x полагается практически постоянным (до сечения $x \sim 10 r_a$), а затем постепенно увеличивается по закону геометрической прогрессии. В поперечном сечении сетка сгущается к кромкам сопла. Шаги по координатным направлениям имеют следующие значения: $\Delta x_{\min} = 0{,}08 r_a$, $\Delta x_{\max} = 0{,}15 r_a$, $\Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 0{,}03 r_a$, $\Delta y_{\max} = \Delta z_{\max} = 0{,}09 r_a$. Шаг по времени составляет $\Delta t = 0{,}08 r_a / u_a = 5{,}8 \cdot 10^{-5}$ с. Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делается 10^5 шагов по времени.

Колмогоровский и тэйлоровский микромасштабы длины в круглой струе связаны с числом Рейнольдса на срезе сопла и осевой координатой (при $x/r_a > 100$) при помощи соотношений [57]

$$l_k = \left(48\,\mathrm{Re}^3\right)^{-1/4} x, \quad l_t = 0{,}88\,\mathrm{Re}^{-1/2}\, x.$$

При $\mathrm{Re} = 1{,}2 \cdot 10^5$ получим, что $l_k = 5{,}9 \cdot 10^{-5} x$ и $l_t = 2{,}5 \cdot 10^{-3} x$, поэтому $\Delta x \sim (14 \div 25) l_k$, $\Delta y = \Delta z \sim (5 \div 15) l_k$.

5.5.4. Результаты расчетов. Линии уровня мгновенного вихря скорости приводятся на рис. 5.32 при $\vartheta = 1{,}2$.

В сдвиговом слое струи присутствуют крупномасштабные вихревые структуры в форме тороидальных осесимметричных вихрей, зарождающихся на некотором расстоянии от среза сопла (порядка 1–2 его диаметров). В области начального участка струи характерный размер вихревых структур является достаточно малым. Вниз по потоку от начального участка характерный размер вихревых структур увеличивается, а обмен количеством движения между струей и окружающей жидкостью интенсифицируется. Контуры когерентной структуры представляют собой эллипсы, что означает анизотропию турбулентных пульсаций.

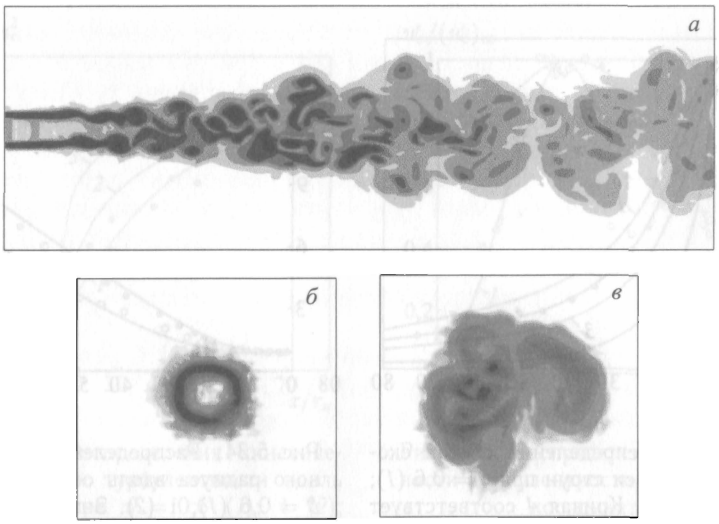


Рис. 5.32. Линии уровня вихря скорости в момент времени $t = 2{,}32$ с в срединном сечении (фрагмент *а*) и сечениях $x/r_a = 10$ (фрагмент *б*) и $x/r_a = 80$ (фрагмент в)

Генерация вихрей связана с неустойчивостью типа Кельвина–Гельмгольца сдвигового слоя. Максимумы и минимумы завихренности приблизительно соответствуют центрам вихрей. При низких числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10^3$) вблизи среза сопла струя является практически осесимметричной. При увеличении числа Рейнольдса (до $\mathrm{Re} \sim 10^4$) и расстояния от среза сопла появляется слабая синусоидальная мода.

Результаты расчетов показывают, что профили скорости и температуры в поперечном сечении потока имеют типичный струйный характер, а также точку перегиба в срединной части и с увеличением координаты x становятся шире, указывая на рост толщины зоны смешения струи с окружающей средой. Вблизи границы струи профили искомых характеристик потока становятся пологими.

Распределения осевой скорости и половинного радиуса вдоль осевой координаты приводятся на рис. 5.33 и рис. 5.34 в сравнении с данными [102] для нескольких степеней подогрева. Полученные распределения достаточно хорошо согласуются с расчетами на основе k–ε модели [158].

Распределения кинетической энергии турбулентности вдоль продольной координаты приводятся на рис. 5.35 для нескольких степеней подогрева. Результаты расчетов нормируются на скорость на оси струи u_c в данном сечении. Полученные распределения подтверждаются данными измерений [102] и расчетами на основе k–ε модели [158].

При увеличении степени подогрева максимум кинетической энергии турбулентности смещается к срезу сопла. В случае изотермической

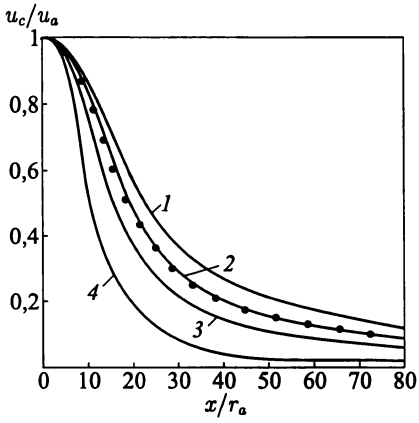


Рис. 5.33. Распределения осевой скорости вдоль оси струи при $\vartheta = 0{,}6$ (*1*); 1 (*2*); 1,8 (*3*). Кривая *4* соответствует данным [25] при $\vartheta = 6$, значки • — расчету по k–ε модели [158]

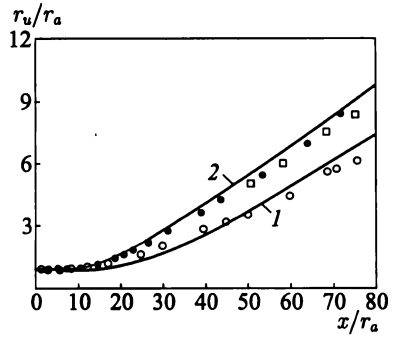


Рис. 5.34. Распределения половинного радиуса вдоль оси струи при $\vartheta = 0{,}6$ (*1*); 1 (*2*). Значки □ соответствуют данным [261] при $\vartheta = 1$, значки • и ○ — данным [102] при $\vartheta = 0{,}7$

струи ($\vartheta = 1$) максимум кинетической энергии турбулентности, нормированной на скорость на срезе сопла u_a, имеет место при $x/r_a \sim 18$ ($x/r_a \sim 22$ при $\vartheta = 0{,}6$). Для струи нагретого газа положение максимума кинетической энергии турбулентности соответствует $x/r_a \sim 14$ при $\vartheta = 1{,}82$ и $x/r_a \sim 9{,}8$ при $\vartheta = 6$ (по данным [102]).

Развитие вторичных течений в струе определяется корреляционными моментами $\langle v_r'^2 \rangle$, $\langle v_\theta'^2 \rangle$ и $\langle v_r' v_\theta' \rangle$, причем в круглой осесимметричной струе корреляция $\langle v_r' v_\theta' \rangle$ равняется нулю.

В центральной зоне струи тройные корреляции $\langle v_x' v_r' v_r' \rangle$ и $\langle v_x' v_\theta' v_\theta' \rangle$ имеют отрицательные значения, что согласуется с данными [261]. Они имеют максимум при $r/x \sim 0{,}075$ и меняют знак при $r/x \sim 0{,}035$.

Влияние неизотермичности на турбулентную структуру струи приводит к тому, что при $\vartheta < 2{,}1$ максимальная величина интенсивности пульсаций продольной скорости возрастает с увеличением степени подогрева и составляет около 25% от скорости на срезе сопла (рис. 5.36), значительно превышая соответствующие значения в струе холодного газа, в которой они не превосходят 16% [25, 39]. Кривые *1* и *2* соответствуют результатам расчетов для струй с естественным ($\theta = 2\%$) и повышенным ($\theta = 8\%$) уровнем турбулентности на срезе сопла. Значки □ соответствуют экспериментальным данным [39] ($\vartheta = 2{,}6$), ▽ — данным [39] ($\vartheta = 3{,}9$), △ — данным [39] ($\vartheta = 5$), ○ — данным [32] ($\vartheta = 2$), + — данным [25] ($\vartheta = 1{,}0$, $\theta = 1{,}5\%$), * — данным [212] ($\vartheta = 2{,}32$, $\theta = 1{,}5\%$), ◇ — данным [24] ($\vartheta = 1$, $\theta = 9{,}3\%$), • — данным [24] ($\vartheta = 1$, $\theta = 20{,}9\%$).

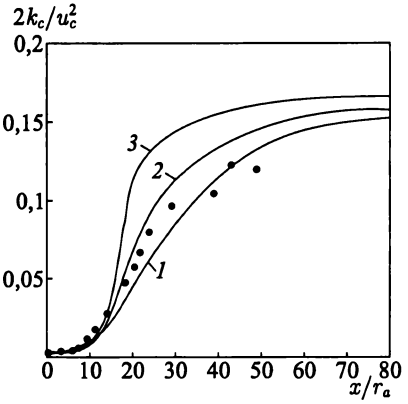


Рис. 5.35. Распределения кинетической энергии турбулентности вдоль оси струи при $\vartheta = 0{,}6$ (*1*); 1 (*2*); 2 (*3*). Значки • соответствуют данным [102] при $\vartheta = 0{,}7$

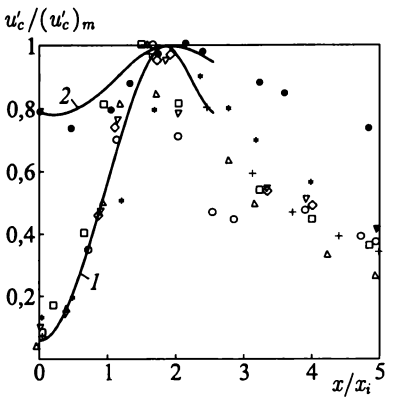


Рис. 5.36. Распределения интенсивности турбулентности вдоль осевой координаты

По мере роста степени подогрева струи максимум пульсаций продольной скорости смещается к срезу сопла. Дальнейшее увеличение степени подогрева потока приводит к качественному изменению характера этого влияния (по данным [25]), в результате чего максимум пульсаций продольной скорости снижается. Такое же влияние неизотермичность потока оказывает и на распределение интенсивности пульсаций температуры, максимальная величина которой составляет порядка 13% от разности температур на срезе сопла $\triangle T$, что существенно меньше максимальной величины пульсаций скорости.

Результаты [24, 25, 212] показывают, что максимальные значения пульсаций продольной скорости имеют место при $x/r_a \sim 16$. В области ядра постоянной скорости интенсивность турбулентности, оставаясь практически постоянной в поперечном направлении, с удалением от среза сопла растет от величины $1{,}5 \div 2\%$ на срезе сопла до величины порядка 6% в конце начального участка. Поскольку внутри ядра отсутствует турбулентное смешение, эффект увеличения степени турбулентности связывается с проникновением пульсаций давления из зоны смешения внутрь ядра. Пульсации скорости на оси струи достигают максимального значения на расстоянии, равном двум длинам начального участка $x = 2x_i$ (рис. 5.36), которое остается практически постоянным как для изотермических, так и неизотермических струй и слабо зависит от условий истечения [25].

Увеличение уровня турбулентности на срезе сопла (при $\theta > 5\%$) приводит к перестройке микроструктуры потока и интенсификации смешения струи с окружающим газом и уменьшению дальнобойности струи [24] (вплоть до полного исчезновения начального участка).

Имеет место существенное различие в характере изменения кинетической энергии турбулентности вдоль оси струи при малом и большом уровне начальной турбулентности. При малой степени турбулентности на срезе сопла кинетическая энергия сначала возрастает, достигает максимума и затем медленно уменьшается. В случае высокого уровня турбулентности на срезе сопла сначала происходит резкое падение кинетической энергии вдоль оси струи, затем начинается ее рост, достигается максимум и далее вниз по потоку происходит уменьшение по степенному закону. При очень больших значениях начальной степени турбулентности происходит непрерывное уменьшение кинетической энергии вниз по потоку.

Распределения пульсаций осевой скорости $\langle v_x'^2 \rangle$ (кривая *1*), радиальной скорости $\langle v_r'^2 \rangle$ (кривая *2*) и температуры $\langle T'^2 \rangle$ (кривая *3*), а также смешанного корреляционного момента пульсаций осевой скорости и температуры $\langle v_x' T' \rangle$ (кривая *4*) вдоль продольной координаты приводятся на рис. 5.37. Кривая *5* из [266] соответствует приближенному расчету. Результаты расчетов нормируются на $10u_a$ и разность температур $10\Delta T$. На начальном участке струи пульсационные параметры принимают значения, характерные для полностью развитого турбулентного течения в круглой трубе. В дальнем поле течения струи эти величины изменяются по зависимости, близкой к степенной. Увеличение пульсаций температуры начинается с расстояния $x/r_a \sim 6$, в то время как пульсации продольной и радиальной скорости начинают увеличиваться при $x/r_a \sim 8$. Эти значения продольной координаты (длины теплового и динамического начального участка) близки к значениям, соответствующих минимумам распределений коэффициентов асимметрии и эксцесса температуры и скорости.

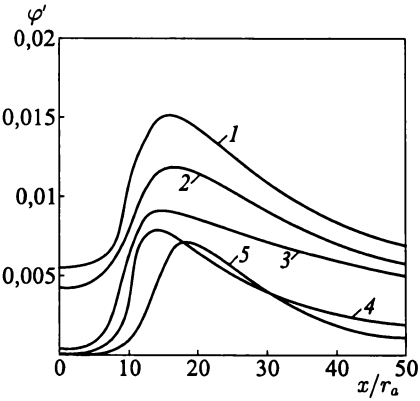


Рис. 5.37. Распределения среднеквадратических значений пульсаций скорости, температуры и смешанного корреляционного момента пульсаций скорости и температуры вдоль оси струи при $\vartheta = 1{,}2$

Вследствие симметрии расчетной области и граничных условий, корреляционные моменты, связанные с радиальной скоростью, на оси струи равняются нулю.

Распределения корреляционных моментов пульсаций осевой скорости и температуры $\langle v_x' T' \rangle$, а также корреляционных моментов пульсаций радиальной скорости и температуры $\langle v_r' T' \rangle$ в поперечном сечении струи приводятся на рис. 5.38. Радиальная координата нормируется на

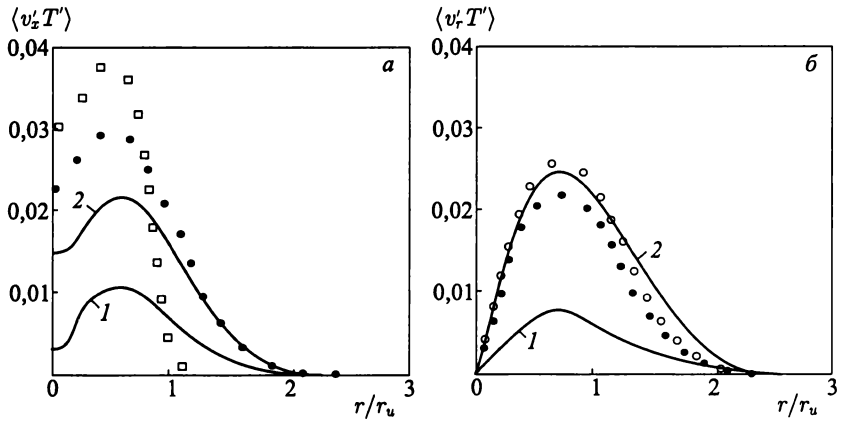


Рис. 5.38. Распределения смешанных корреляционных моментов пульсаций осевой скорости и температуры (фрагмент *а*) и радиальной скорости и температуры (фрагмент *б*) при $\vartheta = 1{,}2$ в сечениях $x/r_a = 10$ (кривые *1*) и $x/r_a = 30$ (кривые 2) в сравнении с данными [58] (значки □), [105] (значки •), [109] (значки ○)

половинный радиус струи. Данные [58] соответствуют дальнему течению (сечению $x/r_a = 118$), а данные [105, 109] — сечению $x/r_a = 30$.

Значения радиальной координаты, при которой корреляции скорости и температуры достигают максимальной величины, практически совпадают в сечениях $x/r_a = 10$ и $x/r_a = 30$ и соответствуют положению максимума кинетической энергии турбулентности ($r/r_u = 0{,}8$ по данным [105] и $r/r_u = 0{,}7$ по данным [109]). Однако максимальное значение и форма рассчитанных профилей, особенно смешанного момента пульсаций осевой скорости и температуры, достаточно сильно отличается от экспериментальных. По-видимому, это объясняется влиянием граничных условий на срезе сопла. Результаты расчетов для момента $\langle v_r' T' \rangle$ имеют лучшее согласование с данными измерений, чем для момента $\langle v_x' T' \rangle$.

В ближнем поле течения струи (при $x/r_a \sim 10$) перенос тепла осуществляется вдоль осевой координаты, поскольку $\langle v_x' T' \rangle / \langle v_r' T' \rangle \sim 2$ в интервале $0{,}2 < r/r_u < 1{,}4$. Вниз по течению (при $x/r_a \sim 30$) вклад продольного и радиального тепловых потоков становится приблизительно равным, так что $\langle v_x' T' \rangle / \langle v_r' T' \rangle \sim 1{,}1$ в интервале $0{,}5 < r/r_u < 1{,}8$. Следует отметить, что в плоской струе $\langle v_x' T' \rangle / \langle v_r' T' \rangle \sim 2$ при $x/r_a = 80$ и в интервале изменения радиальной координаты $0{,}4 < r/r_u < 1{,}3$ [58] (при $\mathrm{Re} = 7{,}9 \cdot 10^3$ и $\Delta T = 25$ K). В осесимметричной струе измерения [58] дают $\langle v_x' T' \rangle / \langle v_r' T' \rangle \sim 1$ вниз по потоку от сечения $x/r_a \sim 100$ и в интервале $0{,}3 < r/r_u < 1{,}3$.

Распределения коэффициентов корреляции $R_{v_x T}$, $R_{v_r T}$ и $R_{v_x v_r}$ в поперечных сечениях струи показывают (рис. 5.39), что при $x/r_a = 10$

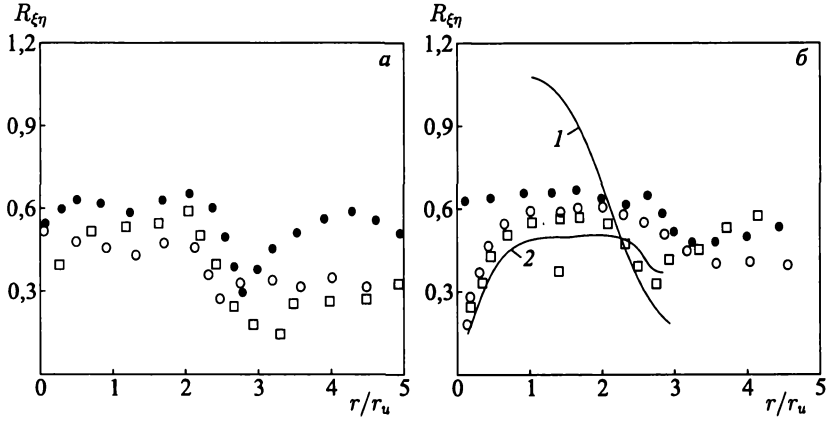


Рис. 5.39. Распределения корреляций осевой скорости и температуры (значки •), радиальной скорости и температуры (значки ○), осевой и радиальной скорости (значки □) при $\vartheta = 2$ в сечениях $x/r_a = 10$ (фрагмент *а*) и $x/r_a = 30$ (фрагмент *б*). Кривые *1* и *2* соответствуют данным [105] и [109]

коэффициент корреляции продольной скорости и температуры является практически постоянным в интервале $0 < r/r_u < 1{,}7$, имея незначительные колебания около среднего значения 0,5. При $r/r_u = 2{,}2$ он уменьшается до 0,15, а при $r/r_u > 2{,}5$ он снова принимает практически постоянное значение, равное $0{,}4 \div 0{,}5$. Коэффициент корреляции радиальной скорости и температуры R_{v_rT} имеет схожее поведение при $r/r_u > 0{,}3$, а в интервале $0{,}3 < r/r_u < 1{,}7$ он принимает постоянное значение, равное 0,38. В приосевой области струи (при $r \sim 0$) градиент его изменения является достаточно большим. Коэффициент корреляции продольной и радиальной скорости $R_{v_xv_r}$ достигает максимального значения 0,45, но его поведение похоже на изменение R_{v_rT}.

В сечении $x/r_a = 30$ профили всех корреляционных коэффициентов являются достаточно гладкими. Коэффициент корреляции R_{v_xT} имеет приблизительно постоянное значение, равное 0,52 при $r/r_u < 1{,}7$, достигая минимального значения 0,5 на оси струи (такое значение подтверждается данными [105], согласно которым он равняется 0,5 в том же сечении и интервале $0 < r/L_u < 1{,}8$). При $r/r_u > 1{,}7$ коэффициент корреляции R_{v_xT} уменьшается до 0,36 вблизи точки $r/r_u = 2{,}3$, а затем снова увеличивается до 0,45. Коэффициент корреляции R_{v_rT} достигает максимального значения 0,46, что согласуется с данными [109]. Градиент изменения коэффициента R_{v_rT} в приосевой области потока при $x/r_a = 30$ приблизительно в 2 раза меньше, чем в сечении $x/r_a = 10$. Поведение корреляционных коэффициентов $R_{v_xv_r}$ и R_{v_rT} оказываются схожими, причем $R_{v_xv_r}/R_{v_rT} \sim 1{,}2$ при $x/r_a = 10$ и $R_{v_xv_r}/R_{v_rT} \sim 1$ при $x/r_a = 30$ ($R_{v_xv_r}/R_{v_rT} \sim 0{,}8$ в сечении $x/r_a = 30$ по данным [105]).

Отношение корреляционных моментов пульсаций плотности и скорости характеризует анизотропию потока массы. Распределения корреляционных моментов пульсаций плотности и скорости вдоль оси струи приводятся на рис. 5.40 для двух значений степени подогрева (расчеты нормируются на $\rho_a u_a$). Результаты расчетов качественно согласуются с данными [158], полученными при помощи k–ε модели турбулентности, которая не учитывает анизотропию турбулентных пульсаций скорости, но позволяет оценить анизотропию диффузионного потока массы. Анизотропия имеет место в серединной области струи при $4 < x/r_a < 40$. Вниз по течению $\langle \rho' v_r' \rangle / \langle \rho' v_x' \rangle \sim 1$ (при $x/r_a > 40$).

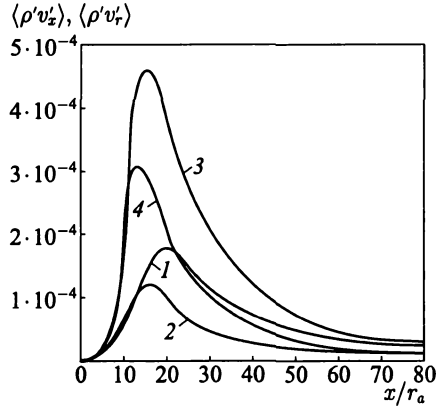


Рис. 5.40. Распределения корреляционных моментов $\langle \rho' v_x' \rangle$ (кривые *1*, *3*) и $\langle \rho' v_r' \rangle$ (кривые *2*, *4*) вдоль оси струи при $\vartheta = 0{,}6$ (кривые *1*, *2*) и $\vartheta = 2$ (кривые *3*, *4*)

Продольные распределения коэффициентов асимметрии (третий момент, skewness factor) и эксцесса (четвертый момент, flatness factor) поля скорости и температуры приведены на рис. 5.41. В то время как распределения третьих и четвертых моментов пульсаций скорости S_v, F_v и температуры S_T, F_T являются качественно и количественно схожими, в дальнем течении струи, при $0{,}4 < x/r_a < 16$ их поведение различается. Перестройка распределений S_T и F_T происходит быстрее, чем S_v и F_v, в частности, коэффициенты S_T и F_T достигают максимального значения при $x/r_a \sim 6$, в то время как S_v и F_v — при $x/r_a \sim 10$. Их максимум соответствует сечению струи, в котором слои смешения достигают ее оси. При этом максимальные значения S_T и F_T существенно превышают соответствующие значения для поля скорости. Схожие тенденции наблюдаются в [88], где $S_T \sim 8$ при $x/r_a \sim 8$ для плоской струи. Минимальное значение коэффициента $R_{v_x T}$ составляет 0,2 и имеет место в том же сечении, где наблюдается максимум S_T и F_T (при $x/r_a \sim 6$). В дальнем поле течения струи распределения S_v и F_v описываются гауссовской кривой, при этом $S_T \sim -0{,}5$ и $F_T \sim 3{,}3$.

Плотность распределения вероятности пульсаций скорости в струе имеет симметричную форму, которая близка к гауссовской при $x/r_a \sim$ ~ 10. Плотность распределения вероятности пульсаций температуры отличается от гауссовской. При $x/r_a \sim 30$ их качественное поведение не изменяется, но скошенность (несимметрия) распределения вероятности пульсаций температуры становится заметной.

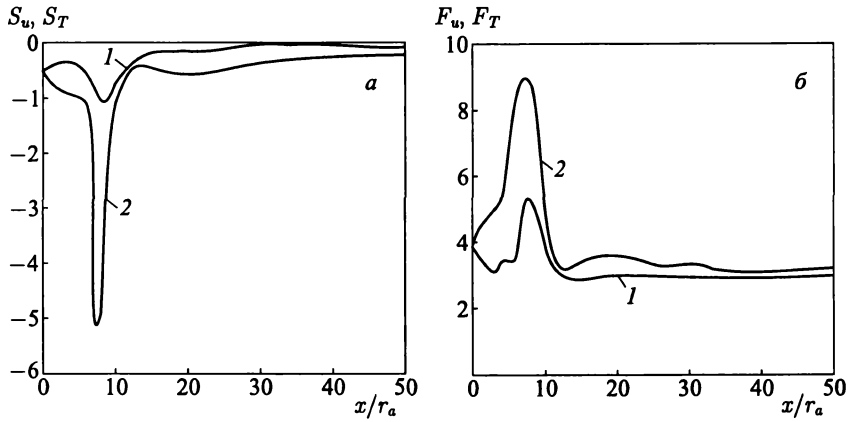


Рис. 5.41. Распределения коэффициентов асимметрии (фрагмент *а*) и эксцесса (фрагмент *б*) пульсаций скорости (кривые *1*) и температуры (кривые *2*) вдоль оси струи при $\vartheta = 1{,}2$

Результаты расчетов находятся в качественном и количественном соответствии с характеристиками распространения изотермических и неизотермических струй, подтверждая основные закономерности затухания газодинамических, тепловых и пульсационных параметров затопленных струй холодного и нагретого газа.

Подогрев струи оказывает существенное влияние на среднее и пульсационное поле течения. С увеличением степени подогрева струи длина начального участка сокращается, степень расширения струи увеличивается, а затухание газодинамических, тепловых и пульсационных параметров на участке расширения струи происходит интенсивнее, чем в случае изотермической струи или струи с меньшей степенью подогрева. Тем не менее, подогрев струи не приводит к существенным качественным изменениям микроструктуры затопленных струй. Максимальная величина пульсаций продольной скорости в зоне смешения струи составляет порядка $15 \div 17\%$ от скорости газа на срезе сопла. Максимум пульсаций продольной скорости на оси струи располагается на удалении, приблизительно равном двум длинам начального участка, и составляет порядка $13 \div 15\%$ от соответствующей величины для холодных струй. Радиальное распределение пульсаций скорости в зоне смешения характеризуется максимумом, смещающимся к оси струи при удалении от среза сопла.

5.6. Течение и теплообмен в области взаимодействии круглой струи с преградой

Проводится моделирование крупных вихрей круглой турбулентной струи, взаимодействующей по нормали с плоской преградой. Условие симметрии не используется (критическая точка не является фиксиро-

ванной). Рассматривается вихревая структура струи, не возмущенной внешними источниками. Для расчетов используется RNG-модель вихревой вязкости с учетом поправки на кривизну линий тока. Расчеты проводятся для различных относительных расстояний от среза сопла до преграды и чисел Рейнольдса. Обсуждается связь между распределением числа Нуссельта по поверхности преграды, интенсивностью и положением вихревых структур. Локальные и интегральные характеристики потока сравниваются с имеющимися результатами и данными физического эксперимента.

5.6.1. Взаимодействие струи с преградой. Исследование течения и теплообмена в области взаимодействия дозвуковой струи с преградой представляет интерес для многих технологических процессов в различных отраслях промышленности, а также создания и развития ресурсосберегающих технологий, к которым, в частности, относится нанесение порошковых (защитных, упрочняющих, токопроводящих) покрытий. Во многих случаях интенсификация переносных свойств среды и уровень тепловых нагрузок на преграде обусловлены турбулентной структурой струйного потока.

На структуру течения и теплообмен в области взаимодействия потока с преградой оказывают влияние многие факторы, в частности, относительное расстояние от среза сопла до преграды, условия истечения струи из сопла (число Рейнольдса, степень турбулентности), угол натекания на преграду, а также ряд других.

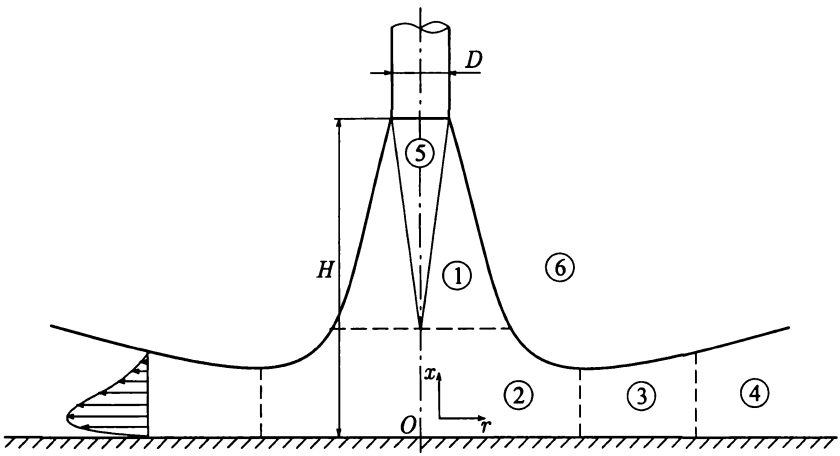


Рис. 5.42. Характерные области течения

При нормальной натекании струи на преграду область течения разбивается на несколько характерных подобластей (рис. 5.42).

В области свободного струйного течения $r/D < 1$ (область 1) источником турбулентности является слой смешения, разделяющий по-

тенциальное ядро потока (область 5), в котором осевая скорость струи остается постоянной, и окружающую покоящуюся жидкость (область 6). При малых расстояниях от среза сопла до преграды значительного смешения потоков не происходит.

В области торможения потока $1 < r/D < 2$ (область 2) изменение осевой скорости обусловлено наличием пограничного слоя на стенке. Скорость струи уменьшается до нуля на стенке, а в области разворота (при $r/D \sim 1$) течение характеризуется сильной кривизной линий тока. Влияние кривизны линий тока приводит к стабилизации течения и уменьшению уровня кинетической энергии турбулентности. Сдвиговый слой, образующийся в результате смешения струи с окружающей жидкостью, достигает стенки, принося с собой достаточно высокий уровень турбулентности.

В окрестности точки торможения уровень турбулентности оказывается незначительным и сравнимым с тем, который имеет место в полностью развитом турбулентном течении в трубе. В отличие от полностью развитого турбулентного течения в трубе, уровень флуктуаций нормальной скорости превышает уровень флуктуаций тангенциальной скорости ($u' \ll v'$). Линейный масштаб турбулентности в существенной степени зависит от предыстории потока, определяемой условиями истечения струи, в то время как в течении чистого сдвига (в течении Куэтта) масштаб турбулентности является функцией только расстояния до стенки ($l \sim \varkappa y$).

В пристеночной области $r/D > 2$ (область 3) касательные напряжения становятся доминирующими, что приводит к увеличению генерации турбулентности. Флуктуации касательной скорости увеличиваются по сравнению с флуктуациями нормальной скорости. Кинетическая энергия турбулентности изменяется монотонно несмотря на то, что максимум турбулентных напряжений более чем в 2 раза превосходит уровень, имеющий место в плоской турбулентной пристеночной струе [69, 70, 124].

Распространяясь вдоль преграды, струя теряет количество движения, а ее толщина увеличивается. В зоне 4 происходит образование крупномасштабных вихревых структур (они характеризуются достаточно большим масштабом, но слабой интенсивностью), их отделение от стенки и дробление на ряд вторичных вихревых структур.

Экспериментальные исследования [69, 70] (теплообмен) и [124] (поле течения) проводились для различных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = (2{,}3 \div 7{,}0) \cdot 10^4$ и расстояний от среза сопла до преграды $H/D = 2 \div 10$. Детальное описание условий экспериментов и их результатов содержится в базе данных ERCOFTAC (www.ercoftac.mech.surrey.ac.uk). При одних и тех же условиях данные по числу Нуссельта расходятся на 20–25 % [189], что связано, повидимому, с влиянием условий истечения струи [230].

При $H/D \leqslant 2$ для оценок трения и теплового потока в критической точке используется точное решение для ламинарного пограничного

слоя [44]. При увеличении расстояния от среза сопла до преграды сказывается влияние слоя смешения, и данные по теплообмену отклоняются от точного решения.

Число Нуссельта имеет максимальное значение в точке торможения ($r = 0$), достигая максимума в критической точке при $H/D = 6 \div 8$, а его минимальное значение наблюдается в области разворота потока (при $r/D \sim 1$). Вниз по течению (при $1 < r/D < 2$) распределение числа Нуссельта имеет локальный максимум [70, 124]. Следует отметить, что в пристеночной струе при $r/D > 2$ число Нуссельта уменьшается более быстро в связи с увеличением толщин динамического и теплового пограничных слоев, образующихся на стенке [126].

В ряде экспериментальных работ, в частности [181], показано, что при малых H/D и не очень большой степени турбулентности в струе, в критической точке наблюдается локальный минимум коэффициента теплоотдачи и кольцевой горб с максимумом при $r/D \sim 0{,}5$.

Для описания течения, возникающего при взаимодействии струи с преградой обычно используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса. Проведенные исследования выявили преимущества и недостатки различных моделей турбулентности.

Высоко- и низкорейнольдсовые версии k–ε модели переоценивают уровень кинетической энергии турбулентности примерно на 55 %, что приводит к завышенному уровню теплового потока почти на 41 %. Стандартная k–ε модель также переоценивает степень расширения струи, предсказывает слишком быстрое уменьшение температуры по осевой координате, недооценивает уровень скорости вблизи стенки и переоценивает его во внешней области потока [126].

В уравнение для кинетической энергии турбулентности вводятся дополнительные источниковые члены, имеющие, в том числе, и дифференциальную форму [127]. Предлагается также ограничить временной масштаб турбулентности $T \sim k/\varepsilon$, входящий в формулу Колмогорова–Прандтля для турбулентной вязкости и уравнение для диссипативной функции [146].

Указанные поправки не приводят к улучшению результатов, касающихся теплообмена [47], а уровень турбулентности оказывается выше, чем наблюдаемый в физическом эксперименте [70, 124]. Кроме того, введение дифференциальных источниковых членов вызывает проблемы с устойчивостью итерационного процесса и требует введения нижней релаксации [336].

Недостатки k–ε модели связаны также с недостаточно точным описанием структуры потока вблизи стенки на основе метода пристеночных функций. Недостатки различных реализаций метода пристеночных функций отмечаются в [80].

Метод пристеночных функций в формулировке Лаундера–Сполдинга дает заниженный уровень скорости при $0{,}5 < r/D < 2{,}5$, а ее профиль при $r/D > 1{,}5$ получается слишком крутым [78]. При $H/D = 2$

и $\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^4$ уровень кинетической энергии турбулентности завышается почти в 9 раз [60].

Более точные результаты по характеристикам турбулентности и трения получаются при использовании k–ε модели с методом пристеночных функций Чиенга–Лаундера [54]. Расчеты проводились при $H/D = 2 \div 40$ и $\mathrm{Re} = (5{,}0 \div 30) \cdot 10^4$. Улучшение точности по характеристикам теплообмена достигается при помощи решения упрощенных уравнений для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации в пристеночном контрольном объеме [55] (в методе Чиенга–Лаундера решается уравнение для кинетической энергии турбулентности, а диссипативная функция находится из условия локального равновесия).

Использование низкорейнольдсовых k–ε моделей турбулентности не приводит к существенному улучшению результатов [176]. В области взаимодействия струи с преградой низкорейнольдсовые модели приводят к существенной переоценке теплового потока к стенке [78]. При увеличении расстояния от среза сопла до преграды расхождение результатов возрастает.

Модель k–ω дает более точные результаты, чем модель k–ε [176]. Впрочем, это находится в противоречии с данными [328], согласно которым модель k–ω, являясь чувствительной к свободной турбулентности, приводит к неудовлетворительным результатам.

Среди двухпараметрических моделей турбулентности наиболее точные результаты позволяет получить модели, имеющие комбинированную природу, такие как двухслойная k–ε/k–l модель [78] и SST-модель Ментера [328].

Нелинейные модели турбулентной вязкости дают более точные результаты по сравнению с k–ε моделью [127]. Тем не менее, данные по теплообмену оказываются на 10% выше измеренных значений. Кроме того, нелинейные модели дают завышенный уровень турбулентных напряжений при $1 < r/D < 2{,}5$ и заниженный при $r/D > 2{,}5$. Влияние поправок на кривизну линий тока при использовании нелинейных моделей сказывается в меньшей степени, чем для линейных.

Достаточно точные результаты позволяют получить многопараметрические модели турбулентности, такие как модель k–ε–f_μ [263] и модель v^2–f [71, 72].

Вихревые структуры оказывают существенное влияние на теплообмен [111, 225]. Характеристики теплообмена осциллируют даже при низких числах Рейнольдса [110, 111] (при $\mathrm{Re} \sim 500$). Интенсивность теплообмена в критической точке связывается с интенсивностью и положением основного вихря [111]

$$\mathrm{Nu}_0 \sim \frac{(\Omega_{\max}/\nu)^{1/2}}{y_v}.$$

Взаимодействие вихревых структур с пограничным слоем пристеночной струи и слоем смешения приводит к тому, что характеристики

трения и теплообмена зависят от времени. Однако большинство из проведенных исследований сконцентрированы на изучении характеристик потока, осредненных по времени.

Численные расчеты, основанные на уравнениях Рейнольдса, не позволяют исследовать генерацию крупномасштабных вихревых структур в области взаимодействия потока с преградой.

Прямое численное моделирование взаимодействия струи с преградой ограничивается малыми числами Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 5 \cdot 10^3$), а расчеты проводятся в плоской или осесимметричной постановке [111] (прямое численное моделирование является трехмерным подходом), за исключением работы [110].

Приложения моделирования крупных вихрей [186, 320, 329] связаны с тестированием подсеточных моделей, конечно-разностных схем и другими вопросами численной реализации [9, 12].

Причины возникновения локального максимума числа Нуссельта на стенке объясняются по-разному. В частности, он связывается с ламинарно-турбулентным переходом в пограничном слое [118, 157] и увеличением кинетической энергии турбулентности в пристеночной струе [71, 230]. В работах [110, 111] изменения характеристик теплообмена в обрасти взаимодействия струи с преградой связываются с генерацией крупномасштабных вихревых структур.

5.6.2. Начальные и граничные условия. Рассмотрим затопленную турбулентную струю, взаимодействующую по нормали с плоской преградой (рис. 5.43). Начало системы координат располагается в точке торможения потока. Положительный отсчет координаты x ведется в сторону, противоположную направлению распространения струи.

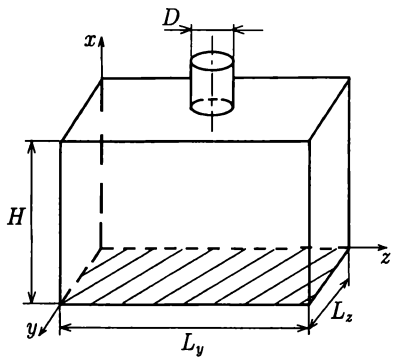


Рис. 5.43. Расчетная область и система координат

Принимается, что в начальный момент времени газ покоится ($u = v = w = 0$, $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 288$ К).

На поверхности преграды выставляются граничные условия прилипания и непротекания для нормальной и тангенциальной скорости, а также задается температура стенки.

На верхней границе расчетной области (за исключением среза сопла) выставляются граничные условия скольжения. Эти границы считаются адиабатическими.

На срезе сопла задаются профили искомых функций, полученные из расчета полностью развитого турбулентного течения в круглой тру-

бе (расчеты проводятся отдельно и их результаты не обсуждаются). В простейшем случае для задания профилей искомых функций на срезе сопла используются данные измерений.

Для экономии вычислительных ресурсов использовался также следующий профиль скорости [110, 111]

$$u(x) = \frac{U_a}{3}\left[1 + \mathrm{th}\left(\frac{0{,}5 - |x|}{2\delta}\right)\right],$$

где U_a — скорость на оси струи, δ — толщина потери импульса (в расчетах $\delta/D \sim 0{,}05$).

Применяются два способа формирования нестационарных граничных условий во входном сечении.

1. На профиль скорости накладываются случайные возмущения в виде белого шума. Среднеквадратическая величина возмущений выбирается исходя из уровня турбулентности на срезе сопла $v_a = \alpha k^{1/2}$, где $\alpha \sim 0{,}05$.

2. В начальный момент времени поток возмущается случайным образом с некоторой максимальной. Поперечная скорость принудительно изменяется по закону $v = v_a \sin \omega t$, где v_a — амплитуда возмущений, ω — их частота (в расчетах $v_a \sim 2$ м/с, $\omega \sim 400$ рад/с).

На границах, через которые газ покидает расчетную область, для скорости и температуры используются неотражающие граничные условия.

5.6.3. Параметры и сетка. Расчетная область представляет собой параллелепипед

$$[0, H] \times [-L_y, L_y] \times [-L_z, L_z],$$

где $L_y = L_z = 10D$.

Варьируется расстояние от среза сопла до преграды ($H/D = 1 \div 12$) и число Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 10^5$). Другим параметрам задачи присваиваются следующие значения: $D = 0{,}04$ м, $T_c = 400$ K, $T_w = 320$ K, $p_\infty = 10^5$ Па. В качестве рабочей среды используется воздух (теплофизические свойства — справочные).

Потенциальное ядро струи распространяется на расстояние порядка 4–8 калибров, поэтому часть расчетов соответствует полностью развитому турбулентному течению ($H/D \sim 10$), а часть — случаю, когда преграда находится в пределах потенциального ядра струи. Расчеты проводятся как при низких числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10^3$), когда ламинарно-турбулентный переход не играет существенной роли [71, 230], так и при высоких числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10^5$).

При $H/D = 12$ используется сетка $240 \times 200 \times 200$ (при изменении расстояния от среза сопла до преграды количество узлов сетки по координате x уменьшается таким образом, чтобы сохранить приемлемое отношение длин граней контрольного объема). Сгущение узлов сетки производится около оси струи и поверхности преграды. Максимальный шаг по координате x имеет место около среза соп-

ла $\Delta x_{\max} = 0{,}18H$, а минимальный — вблизи поверхности пластины $\Delta x_{\min} = 0{,}0012H$, что примерно соответствует значению $\Delta x^+ = 0{,}16$. Минимальные шаги по координатам y и z вблизи оси струи составляют $\Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 0{,}0038H$. Шаг по времени полагается равным $\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ с (при варьировании числом Рейнольдса шаг по времени оценивается как $\Delta t \sim 10^{-3} D/U_c$). Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делается до 50 000 шагов по времени.

Средняя скорость и температура по сечению S рассчитываются по формулам

$$V_b = \frac{1}{S}\int\limits_S V\,ds, \quad T_b = \frac{1}{S}\int\limits_S T\,ds.$$

В качестве характерных размеров для переменных с размерностью длины выбирается диаметр сопла D, а для переменных с размерностью скорости — скорость на срезе сопла U_a. Безразмерное время вводится как tU_c/D.

5.6.4. Результаты расчетов. В сдвиговом слое струи (в области границы смешения струи с окружающей жидкостью) присутствуют крупномасштабные (когерентные) вихревые структуры в форме тороидальных осесимметричных вихрей, зарождающихся на некотором расстоянии от среза сопла (порядка 1–2 его диаметров) и распространяющихся в слое смешения вниз по потоку (по направлению к преграде).

Генерация основного вихря связана с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца сдвигового слоя. При достаточно низких числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10^3$) вблизи среза сопла струя является практически осесимметричной, а критическая точка — фиксированной (она располагается в точке пересечения оси струи с поверхностью преграды). При увеличении числа Рейнольдса (до $\mathrm{Re} \sim 10^4$) и расстояния от среза сопла появляется слабая синусоидальная мода, а критическая точка перемешается около геометрического центра преграды (точки $r = 0$). Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к тому, что течение в струе становится полностью трехмерным и турбулентным перед преградой.

Процесс начального формирования вихрей происходит вплоть до расстояний порядка нескольких калибров от среза сопла. Когерентная структура рождается при взаимодействии нескольких вихрей меньшего размера. Контуры когерентной структуры представляют собой эллипсы, что означает анизотропию турбулентных пульсаций в области, где присутствуют крупномасштабные вихри. Данная область характеризуется ненулевым коэффициентом асимметрии (третий момент). Ось асимметрии вихря вплоть до его взаимодействия со стенкой вращается в направлении вращения вихря. Процесс разрушения вихрей начинается при их взаимодействии с преградой, где течение развивается в условиях неблагоприятного градиента давления. Интенсивность вихрей на расстояниях порядка $2 \div 4$ калибров от критической точки уменьша-

ется до нуля. Однако это не означает, что вихри разрушаются в этой области, а лишь свидетельствует об уменьшении скоррелированности вихревых образований, а следовательно, и их вклада в когерентную составляющую.

Скорость на оси струи остается практически постоянной на расстоянии $x = 3{,}5H$ от среза сопла. В то же время, интенсивность турбулентности на этом расстоянии увеличивается на 5%, а при $H/D = 8$ интенсивность турбулентности вблизи преграды увеличивается на 25% по сравнению с ее уровнем на срезе сопла.

Число Нуссельта и тепловой поток находятся по соотношений

$$\mathrm{Nu}(x) = \frac{q(x)D}{\lambda(T_w - T_b)}, \quad q(x) = \lambda\left(\frac{dT}{dy}\right)_w.$$

Среднее число Нуссельта рассчитывается по формуле

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{2}{r^2}\int_0^R \mathrm{Nu}(r) r\, dr.$$

Отклонение числа Нуссельта в критической точке от его среднего значения рассчитывается по формуле

$$\Delta\mathrm{Nu}_0 = \frac{\mathrm{Nu}_0 - \langle\mathrm{Nu}_0\rangle}{\langle\mathrm{Nu}_0\rangle}.$$

Угловые скобки обозначают осреднение по времени. Индекс 0 относится к параметрам в точке торможения.

Распределения модуля скорости приведены на рис. 5.44. Совпадение расчетных и экспериментальных данных достаточно хорошее во всем диапазоне изменения радиальной координаты.

Распределения нормальных и касательных рейнольдсовых напряжений показаны на рис. 5.45, а распределения кинетической энергии и турбулентной вязкости — на рис. 5.46 и рис. 5.47. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными измерений [69, 70].

Распределения числа Нуссельта по поверхности преграды приведены на рис. 5.48 и рис. 5.49 в сравнении с данными измерений для различных чисел Рейнольдса. Распределение числа Нуссельта имеет два максимума, один из которых располагается в точке торможения, а положение другого зависит от расстояния от среза сопла до преграды. На диаграмме $(r/D, \mathrm{Nu})$ максимумы числа Нуссельта, соответствующие различным значениям H/D, располагаются практически на прямой линии.

Результаты расчетов числа Нуссельта в точке торможения приведены на рис. 5.50 и рис. 5.51 для различных чисел Рейнольдса и расстояний от среза сопла до преграды.

При малых H/D число Нуссельта в точке торможения удовлетворительно описывается зависимостью $\mathrm{Nu}_0 \sim \mathrm{Re}^{0{,}5}$, следующей из реше-

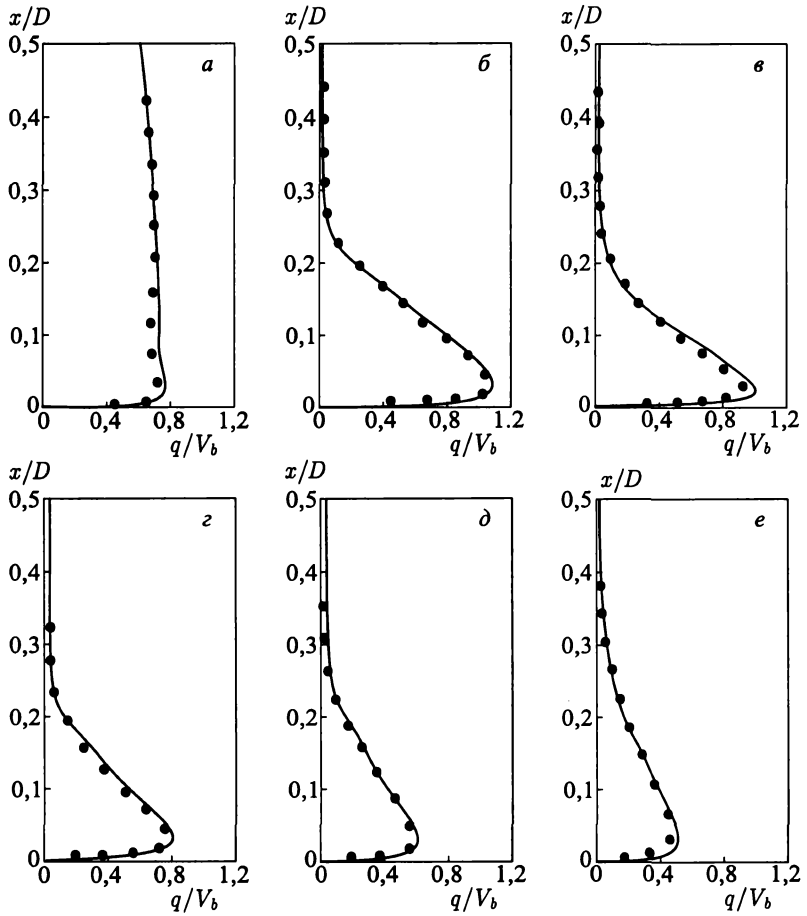


Рис. 5.44. Распределения скорости в различных сечениях по радиальной координате $r/D = 0{,}5$ (*а*); 1 (*б*); 1,5 (*в*); 2 (*г*); 2,5 (*д*); 3 (*е*) при $H/D = 2$, $\mathrm{Re} = 2{,}3 \cdot 10^4$. Значки • соответствуют данным измерений [69, 70]

ния для ламинарного пограничного слоя в окрестности критической точки [44]. Интересно отметить, что такая зависимость подтверждается данными измерений и при достаточно больших числах Рейнольдса [230].

Генерация крупномасштабных вихревых структур приводит к тому, что характеристики теплообмена зависят от времени.

Колебания температуры начинаются в тот момент, когда основной вихрь достигает преграды (кривая *1* на рис. 5.52). Следует отметить, что этот момент времени достаточно слабо зависит от числа Рейнольдса ($t \sim 16$ при $\mathrm{Re} < 10^3$). Колебания температуры вниз по потоку от

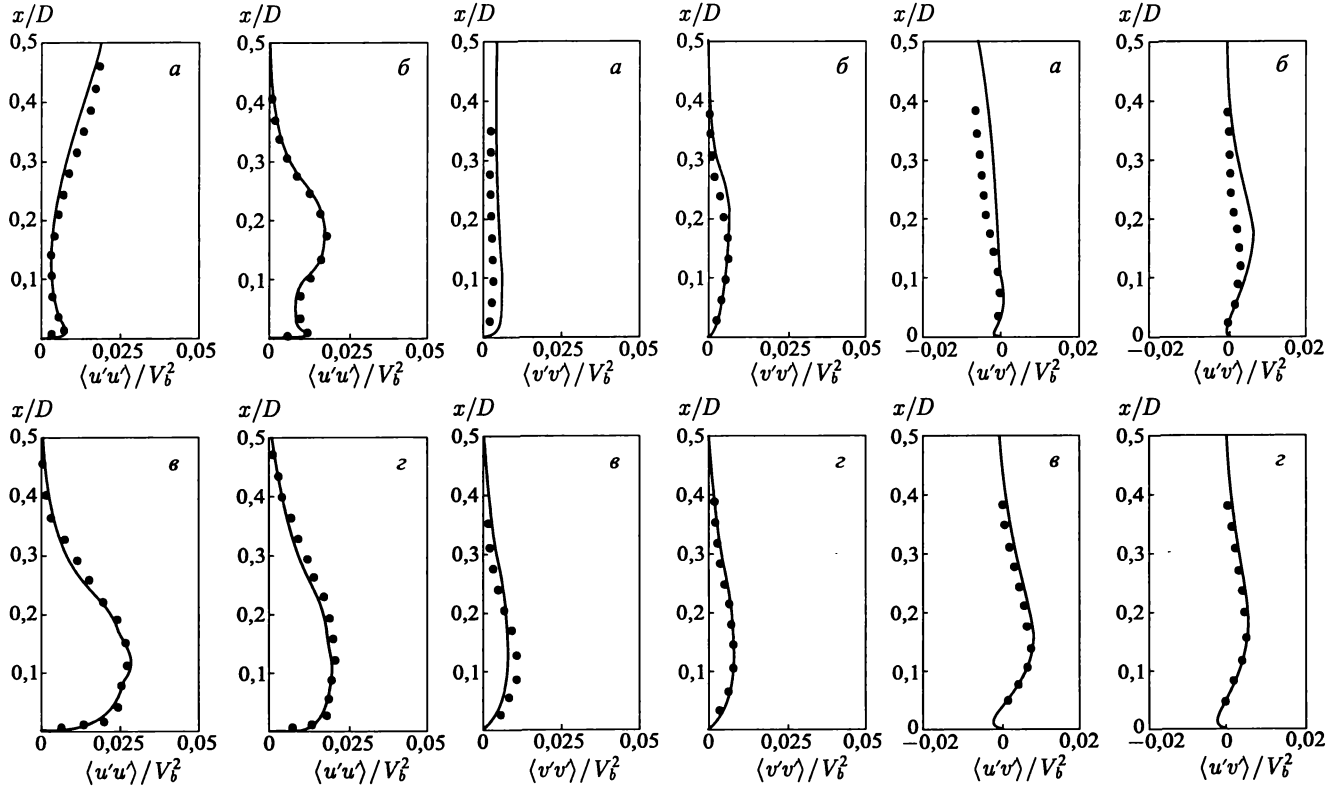


Рис. 5.45. Распределения компонент тензора рейнольдсовых напряжений в различных сечениях по радиальной координате $r/D = 0{,}5$ (*а*); 1 (*б*); 2,5 (*в*); 3 (*г*) при $H/D = 2$ и $\mathrm{Re} = 2{,}3 \cdot 10^4$. Значки • соответствуют данным измерений [69, 70]

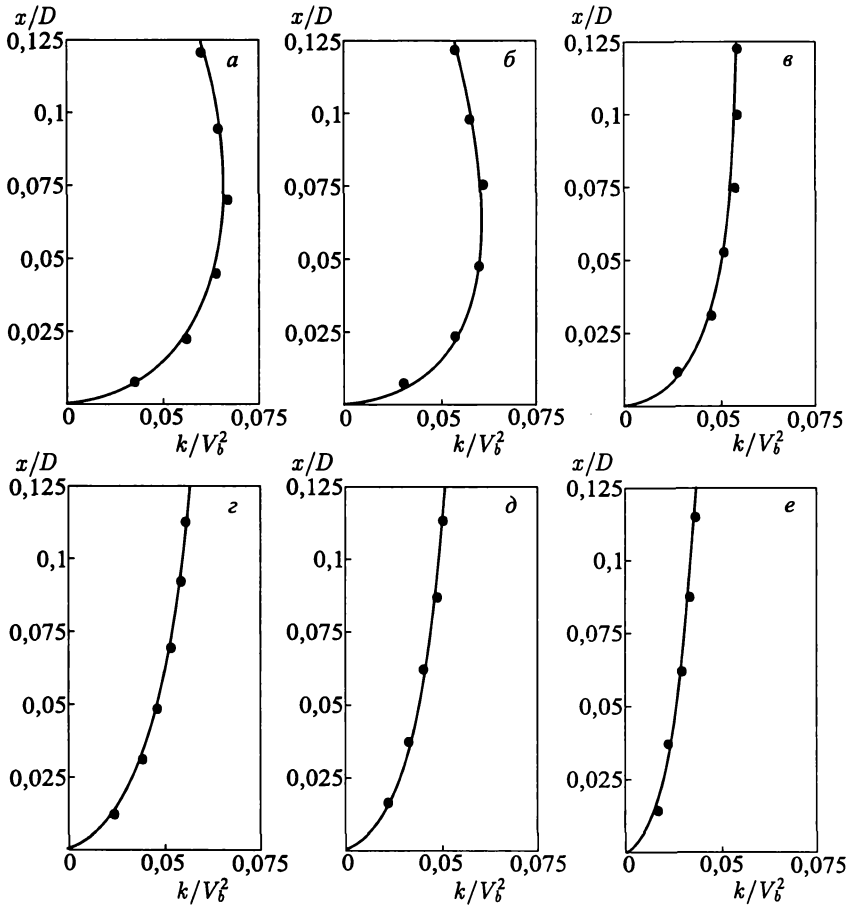


Рис. 5.46. Распределения кинетической энергии турбулентности в сечениях $r/D = 0{,}5$ (*а*); 1 (*б*); 1,5 (*в*); 2 (*г*); 2,5 (*д*); 3 (*е*) при $H/D = 4$ и $\mathrm{Re} = 7{,}0 \cdot 10^4$. Значки • соответствуют данным измерений [69, 70]

критической точки (кривая *2* на рис. 5.52) связаны с перемещением вихревых структур в направлении, параллельном стенке. Уменьшение амплитуды колебаний вызывается смешением пристеночной струи с окружающей жидкостью.

Колебания температуры не являются строго периодическими, а их амплитуда возрастает при увеличении числа Рейнольдса (при малых числах Рейнольдса интенсивность вихревых структур мала, поскольку вязкие эффекты оказывают слабое влияние на неустойчивость сдвигового слоя). Уменьшение расстояния от среза сопла до преграды приводит к тому, что вихри не успевают полностью сформироваться, а амплитуда и частота колебаний температуры уменьшаются.

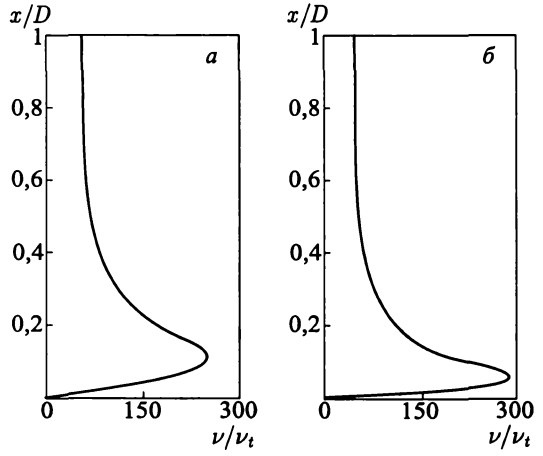


Рис. 5.47. Распределения турбулентной вязкости при $H/D = 2$ и $\mathrm{Re} = 2{,}3 \cdot 10^4$ (фрагмент *а*); $7 \cdot 10^4$ (фрагмент *б*)

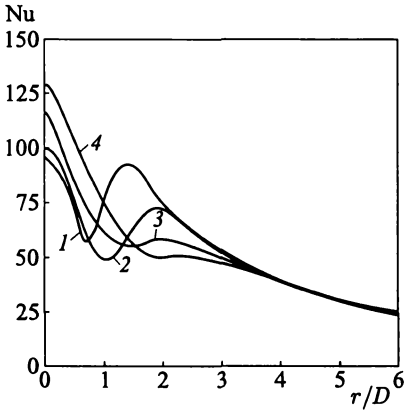


Рис. 5.48. Распределения числа Нуссельта по поверхности преграды при $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^4$ и $H/D = 1$ (*1*); 2,5 (*2*); 5 (*3*); 8 (*4*)

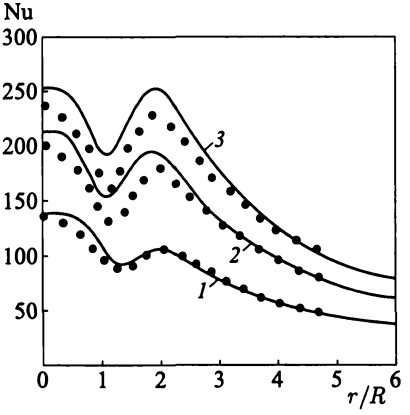


Рис. 5.49. Сравнение распределения числа Нуссельта по поверхности преграды с данными физического эксперимента [69, 124] (значки •) при $H/D = 2$ и $\mathrm{Re} = 2{,}3 \cdot 10^4$ (*1*); $5 \cdot 10^4$ (*2*); $7 \cdot 10^4$ (*3*)

Флуктуационная составляющая числа Нуссельта сравнима с его средним значением даже при малых числах Рейнольдса (Nu_0' составляет около 40% от $\langle \mathrm{Nu}_0 \rangle$ при $\mathrm{Re} \sim 500$), а при $r = \pm 3H$ они становятся того же порядка величины, что и среднее число Нуссельта (рис. 5.53).

Максимум числа Нуссельта всегда располагается в критической точке, несмотря на то, что его величина изменяется во времени доста-

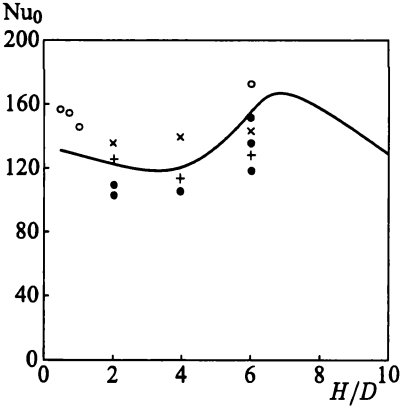


Рис. 5.50. Зависимость числа Нуссельта в точке торможения от относительного расстояния от среза сопла до преграды при $\mathrm{Re} = 2{,}3 \cdot 10^4$. Сплошная линия соответствует результатам расчета, значки • — данным [69, 70]; ○ — данным [230]; × — расчету по k–ε модели [328]; + — расчету по SST-модели [328]

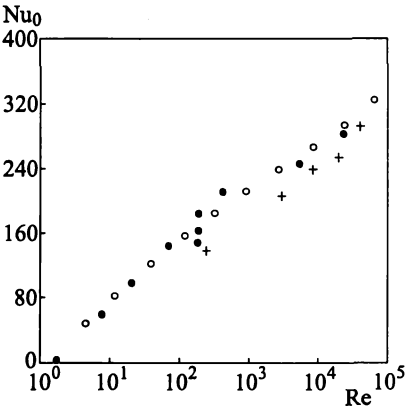


Рис. 5.51. Зависимость числа Нуссельта в точке торможения от числа Рейнольдса при $H/D = 6{,}0$. Значки ○ соответствуют результатам расчета, значки • — данным [69, 124], + — расчету по SST-модели [328]

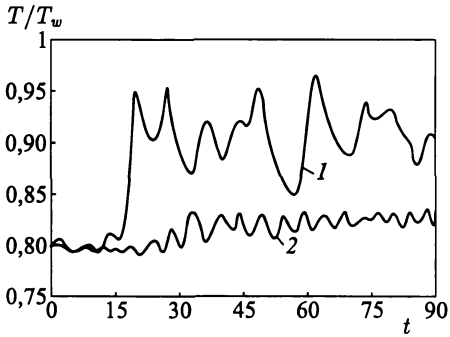


Рис. 5.52. Изменение температуры во времени на расстоянии $x/D = 0{,}02$ от поверхности преграды при $H/D = 10$ и $\mathrm{Re} = 10^3$. Кривые *1* и *2* соответствуют сечениям $r = 0$ и $r = 4H$

точно сильно. Интересно отметить, что распределение числа Нуссельта вдоль стенки в различные моменты времени имеет также локальный максимум, в то время как среднее во времени число Нуссельта изменяется вдоль стенки монотонно.

При $\mathrm{Re} \sim 500$ несимметрия в распределении числа Нуссельта вдоль стенки по обе стороны от критической точки составляет 0,5 %, а при $\mathrm{Re} \sim 10^3$ она достигает 2 %.

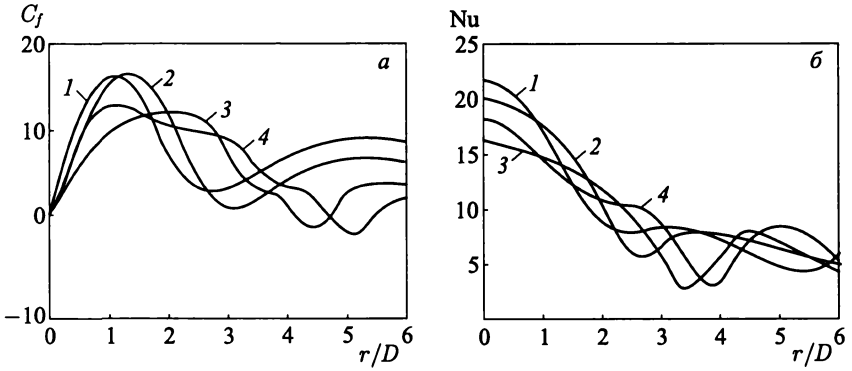


Рис. 5.53. Зависимость коэффициента трения (фрагмент *а*) и числа Нуссельта (фрагмент *б*) от времени при $H/D = 5$ и $\mathrm{Re} = 500$. Кривые соответствуют моментам времени $t = 10$ (*1*); 20 (*2*); 30 (*3*); 40 (*4*)

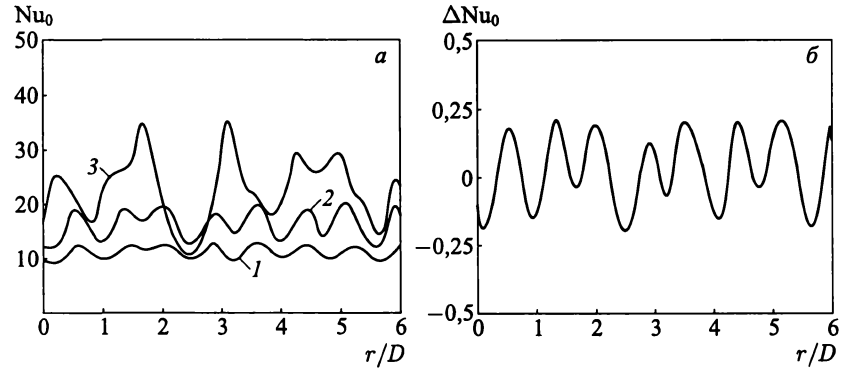


Рис. 5.54. Зависимость числа Нуссельта в точке торможения от времени (фрагмент *а*) и его отклонение от среднего значения (фрагмент *б*) при $H/D = 5$. Кривые *1*, *2*, *3* на фрагмент *а* соответствуют значениям $\mathrm{Re} = 300$, 500, 1000, а кривая на фрагмент *б* — $\mathrm{Re} = 500$

Колебания числа Нуссельта в окрестности точки торможения вызываются взаимодействием основного вихря со стенкой. При больши́х значениях r/D распределение характеристик теплообмена зависит от структуры вторичных вихрей, которые возникают за счет взаимодействия основного вихря с пограничным слоем пристеночной струи. Нестационарный характер этого взаимодействия и изменение структуры теплового пограничного слоя приводят к возникновению второго локального минимума числа Нуссельта.

Рост числа Рейнольдса приводит к увеличению флуктуаций числа Нуссельта в точке торможения (рис. 5.54). Например, при $\mathrm{Re} = 5 \times \times 10^3$ амплитуда флуктуаций составляет 20% от среднего значения,

а при $\mathrm{Re} = 2{,}5 \cdot 10^4$ она достигает 35%. При этом число Струхаля, рассчитанное по скорости на оси струи и размеру выходного отверстия сопла, составляет 0,20 и 0,32 соответственно.

Распределения числа Нуссельта и его флуктуаций, показанные на рис. 5.55, в целом согласуются с распределением флуктуаций скорости.

Уровень флуктуаций скорости в точке торможения не изменяется до тех пор, пока преграда находится в потенциальном ядре струи. Распределение флуктуаций скорости имеет минимум в точке торможения, а его максимум располагается в том месте, где сдвиговый слой достигает поверхности (это положение зависит от H/D). При $H/D > 3$ флуктуации скорости распределены достаточно равномерно вдоль преграды, и локального максимума числа Нуссельта не наблюдается. Локальный максимум флуктуаций числа Нуссельта располагается несколько дальше от точки торможения, чем локальный максимум флуктуаций скорости.

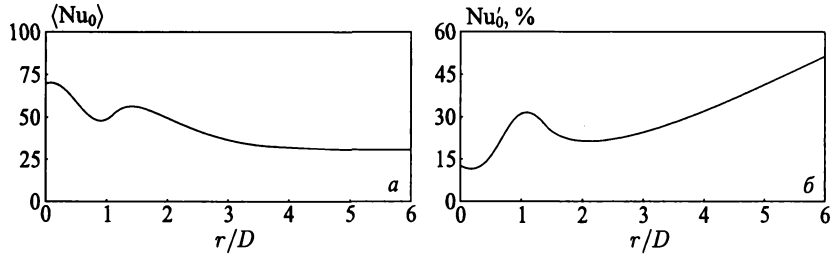


Рис. 5.55. Распределения среднего числа Нуссельта (фрагмент *а*) и его флуктуаций (фрагмент *б*) вдоль стенки при $H/D = 1$ и $\mathrm{Re} = 10^4$

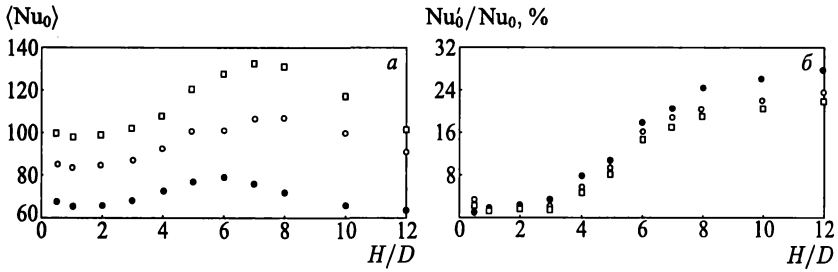


Рис. 5.56. Зависимость среднего числа Нуссельта (фрагмент *а*) и его флуктуаций (фрагмент *б*) от расстояния до преграды при $\mathrm{Re} = 10^4$ (значки •); $2 \cdot 10^4$ (значки ○); $3 \cdot 10^4$ (значки □)

При малых значениях H/D флуктуации числа Нуссельта незначительны (рис. 5.56). При увеличении числа Рейнольдса длина потенциального ядра возрастает, что объясняет, почему максимум числа Нуссельта возникает при $H/D \sim 2$ и $\mathrm{Re} = 10^4$ и бóльших H/D при

$\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^4$. При $H/D = 2{,}5$ флуктуации числа Нуссельта возрастают, изменяясь от 6% до 27% от его среднего значения при увеличении H/D от 1 до 8.

Величина числа Нуссельта в точке торможения сравнительно слабо зависит от интенсивности вихря. Вместе с тем, положение основного вихря оказывает существенное влияние на теплообмен вниз по потоку. Увеличение уровня теплообмена связано с растяжением вихрей в направлении, параллельном стенке. Развитие потока в условиях неблагоприятного градиента давления и его отрыв от стенки приводят к образованию вторичных вихрей, ответственных на второй максимум числа Нуссельта.

Поскольку колебания числа Нуссельта не являются строго периодическими, имеет смысл рассмотреть интервал времени между двумя его последовательными максимумами. За этот промежуток времени число Нуссельта изменяется от максимума ($t \sim 34$) к минимуму ($t \sim 38$), а затем снова к максимуму ($t \sim 41$). Значения времени приведены для $\mathrm{Re} \sim 500$.

При перемещении основного вихря P_1 вниз по потоку (воль стенки) толщина теплового пограничного слоя увеличивается. Изменение положения вихря во времени вызывает смещение локального минимума теплового потока. В то время как вихрь P_1 перемещается вниз по потоку, следующий вихрь P_2 еще не успевает достичь стенки (локальный минимум Nu). Вниз по потоку (при $r \sim 3$) образуется вторичный вихрь S, который вращается в том же направлении, что и основной (по часовой стрелке). Этот момент времени соответствует локальному максимуму числа Нуссельта на стенке.

При достижении вихрем P_2 стенки тепловой поток снова начинает увеличиваться. В этот момент времени вихрь P_1 располагается достаточно далеко от критической точки и не оказывает существенного влияния на теплообмен. Влияние вихря P_2 возрастает по мере его приближения к стенке. В течение цикла растяжение вихря ослабляется из-за влияния вязких эффектов примерно на 10%.

Для несжимаемой жидкости (при $M < 0{,}25$) зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса удовлетворительно описывается зависимостью $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Re}^{0{,}75}$. При $M > 0{,}25$ (при одинаковых числах Рейнольдса) следует учитывать зависимость числа Нуссельта от числа Маха (рис. 5.57).

Распределение числа Нуссельта по поверхности преграды имеет два максимума, один из которых располагается в точке торможения, а положение другого зависит от расстояния от среза сопла до преграды.

Крупномасштабные вихревые структуры оказывают существенное влияние на характеристики трения и теплообмена. Величина числа Нуссельта в точке торможения сравнительно слабо зависит от интенсивности вихря. Вместе с тем, положение основного вихря оказывает существенное влияние на теплообмен вниз по потоку.

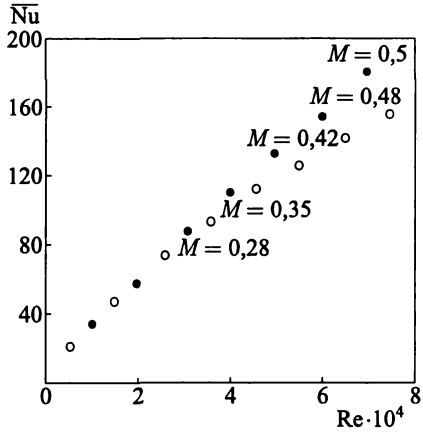


Рис. 5.57. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Маха. Значки • соответствуют расчетным данным для сжимаемой жидкости, а значки ○ — несжимаемой жидкости

Колебания числа Нуссельта в окрестности точки торможения вызываются взаимодействием основного вихря со стенкой. Увеличение уровня теплообмена связано с растяжением вихрей в направлении, параллельном стенке. Развитие потока в условиях неблагоприятного градиента давления и его отрыв от стенки приводят к образованию вторичных вихрей, ответственных на локальный максимум числа Нуссельта.

Колебания температуры не являются строго периодическими, а их амплитуда возрастает при увеличении числа Рейнольдса. Флуктуационная составляющая числа Нуссельта сравнима с его средним значением даже при малых числах Рейнольдса.

5.7. Аэрооптические эффекты в турбулентном потоке

Проводится моделирование крупных вихрей и связанных с ним аэрооптических эффектов в турбулентном пограничном слое, свободном слое смешения и струе, истекающей из круглого сопла в затопленное пространство. Полученные результаты используются для исследования искажений фазовой функции когерентного светового луча, индуцированных турбулентными флуктуациями параметров среды. Результаты численных расчетов сравниваются с данными физического эксперимента и данными, полученными на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса.

5.7.1. Влияние турбулентности на распространение света. Прохождение световой волны через случайно-неоднородную среду (например, турбулентный пограничный слой или сдвиговый поток)

сопровождается возникновением оптических аберраций. В то время как оптические аберрации во внешней области пограничного слоя носят регулярный характер и сравнительно невелики, определяющее влияние на распространение электромагнитного излучения оказывают характеристики потока во внутренней области пограничного слоя.

Вопросам распространения оптического излучения в среде уделяется достаточно большое внимание в литературе. Полученные результаты относятся, в основном, к распространению оптического излучения в атмосфере. Однако в атмосфере наибольшие оптические искажения вносят вихревые структуры максимального масштаба (за исключением приземного пограничного слоя, в котором оптические искажения определяются вихрями минимального масштаба). Влияние атмосферных эффектов связывается с относительно низкими частотами, и они сравнительно легко выявляются современными экспериментальными средствами. Влияние турбулентного перемешивания на распространение оптического излучения обусловлено быстрыми изменениями поля течения (высокими частотами). Поскольку спектр масштабов и частот турбулентного течения изменяется на несколько порядков величины, это создает серьезные трудности для прямых измерений и расчетов [170, 194].

Турбулентное перемешивание приводит в флуктуациям показателя преломления в пространстве и времени. Связь показателя преломления с плотностью устанавливается законом Гладстоуна–Дейла [194, 309]

$$n(\mathbf{x}, t) = 1 + G(\lambda)\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho_0},$$

где ρ_0 — характерная плотность (например, плотность невозмущенной среды). Постоянная зависит от длины волны проходящего света и рабочей среды. В частности, для воздуха

$$G(\lambda) = 0{,}223 \cdot 10^{-3}\left(1 + \frac{7{,}52 \cdot 10^{-15}}{\lambda^2}\right).$$

При прохождении волны через случайно-неоднородную среду флуктуации претерпевают ее амплитуда и фаза (рис. 5.58), что вызывает появление помех, связанных с изменением структуры оптического луча (расширение, флуктуации направления распространения, расщепление). Искажения амплитудных характеристик луча пренебрежимо малы по сравнению с флуктуациями показателя преломления [194, 309].

Расширение пучка делает невозможным его фокусировку на больших удалениях от источника излучения. По мере увеличения диаметра источника дифракционное пятно в фокусе уменьшается не в соответствии с известными в оптике однородных сред формулами, а до некоторого конечного размера (размер насыщения).

Флуктуации направления распространения луча сказываются в смещении его геометрического центра относительно точки наблюдения.

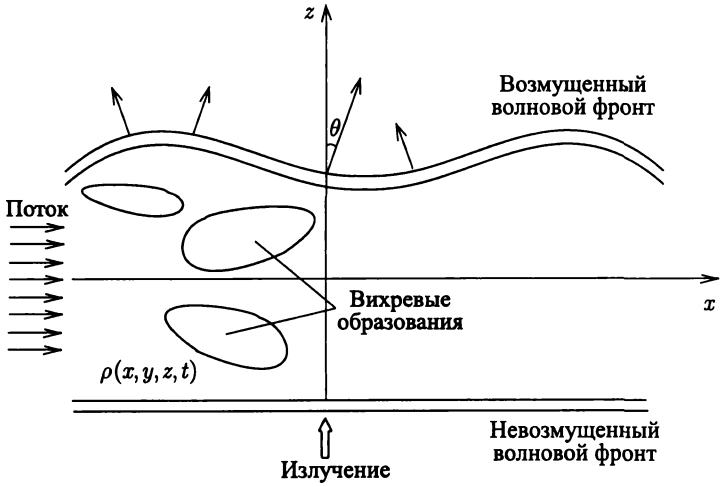


Рис. 5.58. Прохождение света через случайно-неоднородную среду

Расщепление оптического пучка на небольших расстояниях проявляется в сложной структуре наблюдаемого пятна. С увеличением расстояния от источника излучения глубина пространственной модуляции возрастает. На больших удалениях (в области сильных флуктуаций) оптический луч оказывается расщепленным на тонкие нити, имеющие в сечении вид круглых и серповидных пятен. Происходит перераспределение оптической мощности в сечении (средняя мощность остается неизменной).

Рассеяние оптических волн на случайных неоднородностях среды приводит к флуктуациям интенсивности оптического излучения.

Влияние флуктуаций показателя преломления на распространение оптического излучения зависит от отношения D/L, где D — диаметр пучка, L — пространственный период изменения показателя преломления. При $D \ll L$ градиент преломления одинаков по сечению пучка, и он отклоняется целиком. При $D \sim L$ турбулентность действует как линза, которая переформировывает волну. При $D \gg L$ турбулентность отклоняет разные элементы в поперечном сечении оптического пучка по различным направлениям (рассеивание света).

В отличие от потоков, формирующихся за счет турбулентного перемешивания среды (слои смешения, струи), для атмосферной турбулентности характерная длина L достаточно велика, а потери на рассеяние из-за турбулентности незначительны.

5.7.2. Дисперсия флуктуаций фазы. Дисперсия мелкомасштабных флуктуаций плотности σ_ρ^2 и соответствующий корреляционный масштаб l_ρ связаны с дисперсией фазы волны σ_φ^2 при помощи соотно-

шения

$$\sigma_\varphi^2 = \alpha\beta^2 \int_0^L \sigma_\rho^2 l_\rho dy, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dn}{d\rho} = kG(\lambda), \tag{5.3}$$

где L — путь, прошедший оптическим лучом (интегрирование производится поперек пограничного слоя). Значение постоянного множителя α зависит от принятой формы корреляционной функции пульсаций плотности. Например, $\alpha = 2$ для экспоненциальной и $\alpha = \pi$ для гауссовской корреляционной функции, что, согласно (5.3), приводит к разнице в 11 % при расчете дисперсии флуктуаций фазовой функции.

Линейный масштаб l_ρ находится при помощи интегрирования соответствующей корреляционной функции

$$l_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\rho\rho}(y)\, dy.$$

В условиях локального равновесия корреляционный масштаб l_ρ совпадает с корреляционным масштабом пульсаций скорости $l_u \sim k^{3/2}/\varepsilon$. Такое предположение не выполняется вблизи стенки (на стенке пульсации скорости исчезают, поэтому $k = 0$ и $l_u = 0$, но $l_\rho \neq 0$).

Вместо (5.3), для оценки уровня флуктуаций фазы в пограничном слое обычно используется полуэмпирическая формула [309]

$$\sigma_\varphi^2 = \beta^2 l_y \delta \sigma_\rho^2, \tag{5.4}$$

где l_y — интегральный масштаб турбулентности в направлении, нормальном к стенке. В качестве допущения принимается, что $l_y \sim 0{,}1\delta$, где под δ понимается толщина пограничного слоя. Дисперсия флуктуаций плотности оценивается как $\sigma_\rho^2 = A^2 (\rho_w - \rho_\infty)^2$, где ρ_w и ρ_∞ — значения плотности на стенке и свободном потоке, $A = 0{,}1 \div 0{,}2$. При $l_y \ll \delta$ для уточнения (5.4) предлагается провести интегрирование поперек пограничного слоя [309, 318]

$$\sigma_\varphi^2 = \beta^2 \int_0^L \sigma_\rho^2(y) l_y(y)\, dy. \tag{5.5}$$

Ключевым вопросом моделирования аэрооптических эффектов является метод расчета поля флуктуирующих параметров турбулентного потока, в частности, поля флуктуаций плотности [21, 194]. Для этого развит ряд полуэмпирических моделей различной степени сложности. Наибольшее распространение на практике получили модели [309] (однородная турбулентность) и [310] (неоднородная турбулентность). В моделях [309, 310, 318], описываемых соотношениями (5.4) и (5.5), дисперсия флуктуаций плотности получается как разность плотностей среды около стенки и внешней области пограничного слоя. Границы применимости моделей [309, 310] выясняются в [318]. В под-

ходах [319, 337] поле флуктуаций плотности находится из решения уравнения переноса пассивного скаляра.

Пренебрегая флуктуациями давления, флуктуации плотности связываются с флуктуациями температуры при помощи уравнения состояния [319, 337]. Флуктуации температуры находятся при помощи аналогии Рейнольдса между флуктуациями скорости и температуры и модели пути смешения Прандтля [183], считая, что соответствующие линейные масштабы связаны при помощи соотношения $l_u/l_T = \mathrm{Pr}_t$ (турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение).

В отличие от решения RANS, DNS и LES позволяют получить поле флуктуаций плотности, а также распределения параметров σ_ρ^2 и l_ρ из решения полных (DNS) или фильтрованных (LES) уравнений Навье–Стокса [21].

Метод численного моделирования аэрооптических характеристик дозвукового потока воздуха около плоской прямоугольной выемки, включая поле турбулентных пульсаций показателя преломления, предлагается в [31]. Для замыкания уравнений Рейнольдса используется модель Кокли, а также гипотеза замороженной стационарной локально изотропной турбулентности с колмогоровским спектром пульсаций. Оптические характеристики турбулентной среды находятся по локальным значениям средних аэродинамических полей. Флуктуациями давления пренебрегается по сравнению с флуктуациями температуры. Однако для аэродинамических приложений указанная гипотеза нарушается для вихревых структур максимального масштаба [138], а определение пульсационных параметров потока и их средних значений связано с пренебрежением микроструктурой турбулентного потока.

5.7.3. Возмущение фазы волны. Распространение электромагнитной волны в среде описывается уравнениями Максвелла. Предполагая, что масштаб времени, связанный с распространением волны, значительно меньше масштаба времени турбулентных флуктуаций, показатель преломления не зависит от времени, а среда является непроводящей и имеет постоянную магнитную проницаемость, распространение света описывается волновым уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля. Показатель преломления находится из соотношения $n = c_0/c$, где c — скорость света в среде, c_0 — скорость света в вакууме. Для монохроматической синусоидальной волны с частотой ω уравнение (5.6) имеет точное решение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t\right], \tag{5.7}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность поля в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t; $\mathbf{E}_0$ — напряженность поля в точке $\mathbf{r} = 0$. Волновое число связывается с частотой или длиной волны $k = \omega c = 2\pi/\lambda$.

Фазовая функция волнового фронта определяется по формуле

$$\varphi = \int \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{l}/\lambda$ представляет собой волновой вектор, а $\mathbf{l}$ характеризует направление распространения волны.

При прохождении монохроматической плоской волны через слой, в котором показатель преломления изменяется, ее амплитуда остается практически неизменной, а фаза претерпевает возмущения по сравнению с начальным фронтом $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ представляет собой изменение фазы волны, связанное с неоднородностью среды.

Напряженность поля возмущенной волны получается путем умножения решения (5.7) на множитель $\exp(i\Delta\varphi)$, где $\Delta\varphi(x, y)$ обозначает возмущение фазы при прохождение волны через слой толщиной $L = |z_{\max} - z_{\min}|$. Распределение фазы волны находится при помощи интегрирования распределения показателя преломления по толщине слоя

$$\Delta\varphi(x, y, t) = k \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \Delta n(x, y, z, t)\, dz,$$

где $\Delta n(x, y, z, t)$ представляет собой изменение показателя преломления среды вдоль пути луча. Направление распространения света совпадает с направлением оси z (поперек потока).

При малых возмущениях волнового вектора изменением направления распространения луча пренебрегается, и интеграл принимает вид

$$\varphi(x, y, t) = k_0 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} n(x, y, z, t)\, dz, \tag{5.8}$$

где $\varphi(x, y, t)$ — распределение фазы в плоскости (x, y), нормальной к направлению распространения волны z в момент времени t.

Результаты расчетов обычно представляются в виде [138]

$$\widetilde{\varphi}(x, y, t) = \frac{\varphi(x, y, t)}{k_0 L \Delta n} \simeq \frac{1}{L\Delta n} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} [n(x, y, z, t) - n_\infty]\, dz. \tag{5.9}$$

В направлении распространения луча имеем

$$\psi(x) = L \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{\Delta n} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\partial n}{\partial x}\, dz,$$

где L — размер области турбулентного перемешивания. Для спектров имеет место связь

$$S_\psi(k_x L) \sim (k_x L)^2 S_\varphi(k_x L).$$

Для слоя смешения принимается, что $\Delta n = |n_1 - n_2|$ и $L = 2\delta$, где δ — локальная ширина зоны смешения, а индексы 1 и 2 относятся к смешивающимся потокам. Результаты расчетов для струи нормируются на $\Delta n = |n_a - n_\infty|$ и $L = 2r_a$, где индексы a и ∞ относятся к параметрам на срезе сопла и затопленном пространстве.

5.7.4. Результаты расчетов. Расчеты пограничного слоя на плоской пластине проводятся на сетке $180 \times 90 \times 90$. При этом $x^+ = 45$, $y^+_{\min} = 1$ (поперек пограничного слоя), $z^+ = 14$, где

$$y^+ = \left(\frac{u_\tau}{\nu_w}\right) y, \quad u_\tau = \left[\frac{\mu_w}{\rho_w}\left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}\right)_w\right]^{1/2}.$$

При этих условиях $\mathrm{Re}_\delta = 2{,}6 \cdot 10^4$ (число Рейнольдса, вычисленное по толщине пограничного слоя $\delta = 18$ мм) и $\mathrm{Re}_{\delta_m} = 2{,}8 \cdot 10^3$ (число Рейнольдса, вычисленное по толщине потери импульса $\delta_m = 2{,}2$ мм).

Расчеты дают уровень флуктуаций плотности на 10–20% выше по сравнению с измерениями. Максимум распределения пульсаций плотности по координате y располагается достаточно близко к стенке. При $0{,}2 < y/\delta < 0{,}6$ среднеквадратическое значение флуктуаций плотности остается практически постоянным, что приводит к равномерному распределению дисперсии флуктуаций фазы волны в этой области.

Сравнение линейных масштабов l_u и l_ρ показывает, что их равенство имеет место лишь в интервале $0{,}1 < y/\delta < 0{,}22$. В остальной области пограничного слоя корреляционный масштаб пульсаций скорости существенно меньше корреляционного масштаба пульсаций плотности.

Результаты расчетов, относящиеся к пограничному слою на плоской пластине, приведены на рис. 5.59 и рис. 5.60 (считается, что $\alpha = 2$). Пластина имеет постоянную температуру $T_w = 300$ К. Результаты расчетов по соотношению (5.5) (кривая *4*) дают завышенные значения по сравнению с моделью [309] (кривые *2* и *3*), описываемой соотношением (5.4). В отличие от кривой *4*, распределение дисперсии фазы волны, полученное на основе моделирования крупных вихрей (кривая *1*), имеет точку перегиба.

В соответствии с аналогией Рейнольдса между пульсациями скорости и температуры, коэффициент корреляции $R_{u'T'} = -1$. Результаты моделирования крупных вихрей показывают, что в интервале $0{,}12 < y/\delta < 0{,}86$ коэффициент корреляции имеет практически постоянное значение $R_{u'T'} = -0{,}5$, что согласуется с данными [318].

Расчеты течения в слое смешения проводятся при $\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^5$ (число Рейнольдса рассчитывается по толщине потери импульса) в диапазоне $\mathrm{M}_c = 0{,}15 \div 0{,}8$, где $\mathrm{M}_c = (u_1 - u_2)/(a_1 + a_2)$, a — скорость звука. При $\mathrm{M}_c = 0{,}15$ сжимаемость не сказывается на характеристиках потока ($\rho_2/\rho_1 = 1$), а при $\mathrm{M}_c = 0{,}9$ перепад плотностей составляет $\rho_2/\rho_1 = 4$.

Профили флуктуаций плотности в слое смешения приводятся на рис. 5.61 при $\mathrm{M}_c = 0{,}8$. Распределения флуктуаций плотности и давления в поперечных сечениях слоя смешения имеют одинаковую форму

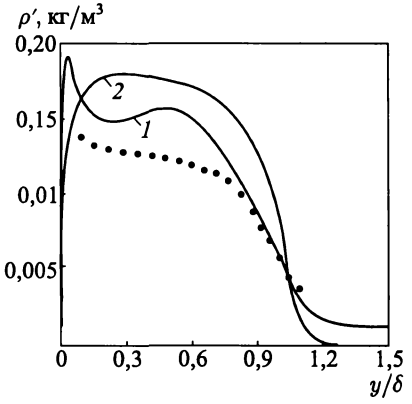


Рис. 5.59. Распределение флуктуаций плотности в пограничном слое. Кривая *1* соответствует результатам расчета, кривая *2* — расчету [318], значки • — данным измерений [318] (при $M_c = 0{,}88$)

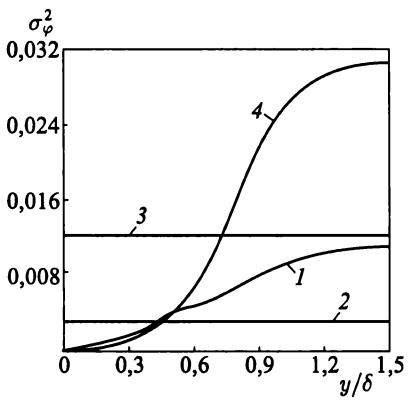


Рис. 5.60. Распределения дисперсии флуктуаций фазовой функции волнового фронта в пограничном слое. Кривая *1* соответствует результатам расчета, *2* — расчету по (5.4) при $A = 0{,}1$, *3* — расчету по (5.4) при $A = 0{,}2$, *4* — расчету по (5.5)

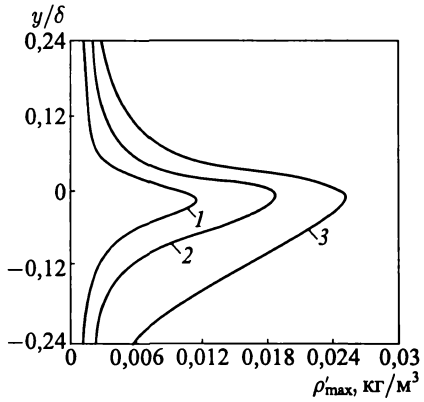


Рис. 5.61. Профили флуктуаций плотности в поперечном сечении слоя смешения при $x/L = 0{,}25$ (*1*); 0,5 (*2*); 0,75 (*3*)

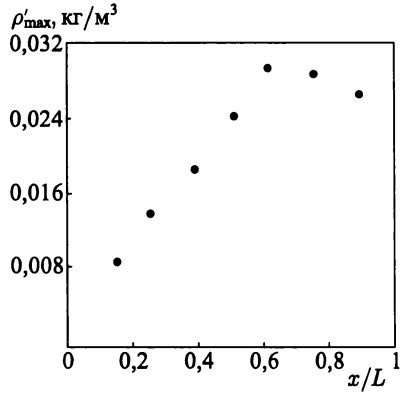


Рис. 5.62. Зависимость максимального уровня флуктуаций плотности от продольной координаты в слое смешения

с максимумом на линии раздела потоков. Профили пульсаций давления являются более наполненными, а максимальная величина пульсаций давления увеличивается по координате x по зависимости, близкой к линейной. Малые отклонения от линейной зависимости имеют место лишь при $x/L > 0{,}68$. В тоже время, зависимость максимальной величины флуктуаций плотности от продольной координаты является

немонотонной (рис. 5.62). При $x/L < 0{,}6$ такая зависимость близка к линейной, потом достигается максимум и плавное уменьшение.

Для волнового спектра в слое смешения и промежуточном диапазоне волновых чисел имеет место степенная зависимость $S_\varphi(k_x L) \sim (k_x L)^{-q}$, где $q \sim 2$ (рис. 5.63). Сжимаемость слабо сказывается на спектре (влияние сжимаемости имеет место при больших волновых числах).

При увеличении эффективного числа Маха флуктуации плотности возрастают. Результаты расчетов показывают, что $l_\rho \sim 4l_u$, где $l_u = 0{,}2k^{3/2}/\varepsilon$.

Расчеты течения в затопленной круглой струе проводятся в диапазоне $10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10^5$ (число Рейнольдса рассчитывается по скорости на срезе сопла и его диаметру).

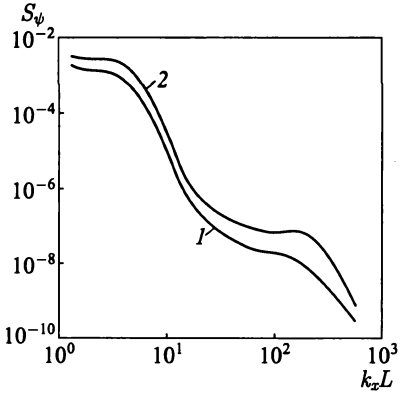


Рис. 5.63. Спектр флуктуаций фазы в свободном слое смешения при $M_c = 0{,}2$ (кривая *1*) и $M_c = 0{,}8$ (кривая *2*)

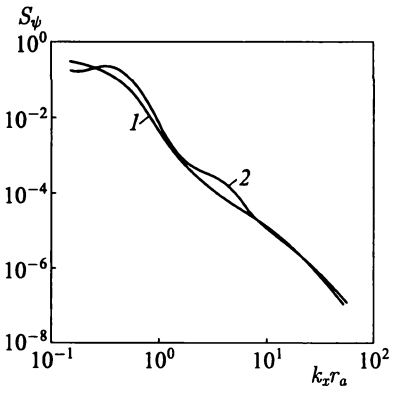


Рис. 5.64. Спектр флуктуаций фазы в круглой струе при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^3$ (кривая *1*) и $\mathrm{Re} = 1{,}5 \cdot 10^4$ (кривая *2*)

Для волнового спектра в свободной струе для $\mathrm{Re} = (2 \div 8) \cdot 10^4$ при высоких волновых числах $2r_a k_x > 1$ имеет место степенная зависимость $S_\varphi(k_x L) \sim (2r_a k_x)^{-q}$, где $q \sim 2{,}5$ (рис. 5.64). Спектр для струи круче, чем для слоя смешения из-за более сильного турбулентного перемешивания. При этом число Рейнольдса, вычисленное по параметрам на срезе сопла, не оказывает существенного влияния на спектр.

Моделирование крупных вихрей турбулентных течений дает полную информацию о средних и флуктуирующих параметрах потока, что позволяет рассчитать параметры, связанные с распространением излучения в случайно-неоднородной среде, без использования полуэмпирических моделей и упрощающих предположений.

Результаты моделирования показывают, что спектр флуктуаций фазы достаточно слабо зависит от параметров на входе в расчетную

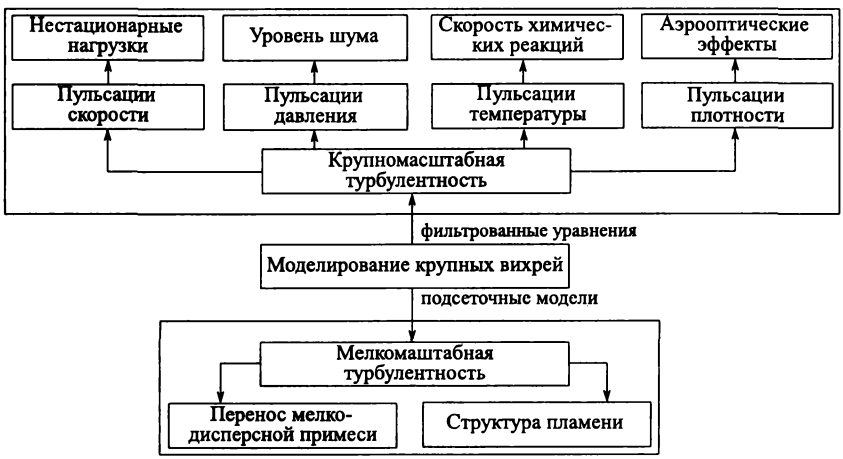
область (такое влияние имеет место при больши́х волновых числах). Применение полуэмпирических моделей турбулентности приводит к погрешностям при расчете дисперсии флуктуаций фазы волнового фронта.

Полученные результаты могут быть полезными для учета влияния флуктуаций плотности на прохождение оптического излучения через случайно-неоднородную среду в расчетах, основанных на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Разработанные средства численного моделирования могут быть использованы для исследования искажений фазовой функции когерентного светового луча, индуцированных турбулентными флуктуациями параметров среды, в оптических измерительных системах и других устройствах.

Заключение

Развитие высокопроизводительных вычислительных систем параллельной обработки данных и разработка эффективных численных методов решения нелинейных задач механики жидкости и газа создают необходимые предпосылки для реализации современных подходов к численному моделированию турбулентных течений.

Области применения. Учитывая накопленный опыт моделирования турбулентных течений различного класса, представляется целесообразным использование метода моделирования крупных вихрей для расчетов турбулентных течений в тех областях, в которых играют существенную роль флуктуации локальных или интегральных характеристик потока (аэродинамика, механика газодисперсных и газокапельных потоков, акустика, физика горения и взрыва).



Области приложения LES

В перспективе LES (моделирование крупных вихрей) способен обеспечить повышение точности расчетов интегральных или осредненных характеристик потока и получение качественно новой информации о вихревой структуре течения и нестационарных нагрузках, действующих на элементы конструкции. К таким характеристикам, в частности, относятся распределения моментов высшего порядка пульсаций скорости, плотности, температуры и давления, распределения скорости диссипации кинетической энергии турбулентности и других.

Полученные результаты могут быть полезными при построении обосновании новых моделей турбулентности, что является необходимым элементом совершенствования методов математического моделирования внутренних и струйных турбулентных течений.

Нестационарные нагрузки. Для аэродинамических приложений и газодинамики турбинных машин представляют интерес исследования нестационарных нагрузок, действующих на обтекаемое тело или турбинные лопатки, а также флуктуации коэффициентов сопротивления и подъемной силы.

Течения газа в компрессорах и турбинах характеризуются аэродинамическим взаимодействием между лопаточными венцами. Рабочая лопатка при своем движении относительно статорных решеток испытывает периодические воздействия как от следовой и потенциальной неравномерности течения, порождаемой предыдущей решеткой статора, так и от потенциальной неравномерности потока, порождаемой последующей решеткой. В результате этого взаимодействия на рабочие лопатки действуют нестационарные нагрузки, которые снижают прочностные свойства конструкции и коэффициент полезного действия ступени, а также приводят к другим нежелательным явлениям (например, флаттеру, связанному с аэроупругими коллективными изгибно-крутильными колебаниями турбинных лопаток).

Аэроакустика. Акустические приложения, в частности, предсказание уровня шума, производимого струями ракетных двигателей, требуют расчета поля пульсаций давления. Во многих случаях требуется изучение спектра и его формы (ширина спектра, тона), а также точное отслеживание акустических волн.

В методе акустической аналогии Лайтхилла производится расчет поля источника тем или иным способом, и используется аналитическое решение, описывающее распространение звука от источника к локализованному приемнику. Отражение и рассеяние волн на внешних поверхностях (вне области источника) и влияние сдвига на распространение звука не учитываются.

В подходе, основанном на решении уравнений Рейнольдса, среднее поле течения рассчитывается. Полученная информация используется для выявления широкополосного шума, а описание нестационарного движения и расчет корреляционных функций для оценки акустического излучения на основе среднего поля течения требует привлечения полуэмпирических моделей.

Периодическое воздействие на струю с частотами из области наибольшей восприимчивости струи позволяет эффективно управлять крупномасштабной структурой вплоть до резонансного усиления вихревых структур и воздействия на широкополосную турбулентность.

Развитие современных методов моделирования турбулентных течений привело к формированию нового направления — вычислительной аэроакустики (Computational Aero-Acoustic, CAA). Метод моделирования крупных вихрей позволяет, в частности, получить всю информацию, необходимую для расчета звукового поля (поле флуктуаций давления), как часть решения фильтрованных уравнений Навье–Стокса. При этом требуется, чтобы все интересующие длины пространственно

разрешались с достаточной степенью точности во всей области между источником и приемником (для схемы 2-го порядка требуется порядка 10–15 узлов на длину волны).

Двухфазные и химически реагирующие течения. В механике двухфазных течений турбулентные пульсации скорости газового потока приводят к тому, что частицы попадают в низкоскоростные и застойные зоны, что вызывает зашлаковывание определенных участков газодинамического тракта. Следует отметить, что модели, основанные на детерминистическом подходе к описанию двухфазных течений (например, на лагранжевом описании дисперсной фазы и эйлеровом описании несущего потока), либо не предсказывают указанные эффекты (модель позволяет рассчитать только средние параметры), либо приводят к существенным погрешностям (флуктуации газодинамических параметров получаются на основе приближенных подходов).

Процессы раздувания или эрозионного горения топлива связаны с особенностями турбулентного переноса вблизи горящей поверхности заряда.

Нерешенные проблемы. Для успешного применения метода моделирования крупных вихрей в различных предметных областях требуется разработка критериев сходимости и оценки качества расчетных сеток (исследование зависимости результатов численного моделирования от ширины фильтра), выбора шага по времени, подходов к пристеночному моделированию, позволяющих уменьшить число узлов сетки вблизи стенки, а также моделей подсеточного переноса, учитывающих влияние стенки, сжимаемости, физико-химических процессов и дисперсной фазы на структуру мелкомасштабной турбулентности. Требуется разработка подходов к постановке начальных и граничных условий, методов дискретизации фильтрованных уравнений Навье–Стокса на основе неструктурированных сеток; разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространству, методов ускорения сходимости и постановки нестационарных граничных условий.

С вычислительной точки зрения, довольно важное значение имеет вопрос о возможности замены полной расчетной области ее частью с соответствующими граничными условиями на границах разреза. Поскольку моделирование крупных вихрей является принципиально трехмерным подходом, возникает вопрос о том, насколько хорошим приближением служит решение для части расчетной области решения для полной расчетной области и при каких условиях это достигается на практике.

Общепринятый подход к реализации LES, основанного на неявной фильтрации уравнений Навье–Стокса, состоит в построении расчетной сетки и связывании ширины фильтра Δ с объемом ячейки V или шагом сетки h. Это приводят к тому, что результаты расчетов становятся зависимыми от ширины фильтра, определяющей наименьшие масштабы разрешимых вихрей. На самом деле, реализация LES должна включать

процедуру адаптации сетки к решению (иногда используется наименование Adaptive LES).

Для иллюстрации рассмотрим некоторую пространственно-временну́ю характеристику турбулентного потока $\Phi(\mathbf{x}, t)$, выступающую в качестве целевой функции, масштаб $\Delta(\mathbf{x}, t)$, определяющий разрешение сетки, и точность разрешения δ, которую необходимо получить в результате расчета.

В качестве параметра, характеризующего разрешение масштабов турбулентного движения, выберем кинетическую энергию, разделив ее на кинетическую энергию разрешимых масштабов $k(\mathbf{x}, t)$ и кинетическую энергию неразрешимых масштабов $k_{\text{sgs}}(\mathbf{x}, t)$. Функцию $\Phi(\mathbf{x}, t)$ определим в соответствии с соотношением

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{k_{\text{sgs}}(\mathbf{x}, t)}{k(\mathbf{x}, t) + k_{\text{sgs}}(\mathbf{x}, t)}.$$

Функция Φ принимает значения от 0 до 1, причем значение $\Phi = 0$ соответствует прямому численному моделированию, а значение $\Phi = 1$ — решению осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Меньшие значения Φ соответствуют разрешению более мелких вихрей. Контроль за поведением функции Φ осуществляется при помощи изменения $\Delta(\mathbf{x}, t)$ (меньшие значения Δ позволяют разрешить более мелкие вихри).

Значение $\delta = 0{,}2$ соответствуют разрешению приблизительно 80% спектра кинетической энергии. Изменяя $\Delta(\mathbf{x}, t)$ через изменение шага сетки $h(\mathbf{x}, t)$, расчет проводится до тех пора, пока будет достигнута заданная точность

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \leqslant \delta.$$

В тех областях потока, где $\Phi > \delta$ производится сгущение узлов сетки, а где $\Phi < \delta$ сетка не изменяется.

Хотя определение функции Φ является достаточно простым с концептуальной точки зрения, требуется некоторая методология для оценки подсеточной кинетической энергии k_{sgs}.

Несмотря на имеющиеся проблемы, достигнутые успехи показывают, что метод моделирования крупных вихрей является перспективным направлением в численном моделировании турбулентных течений и представляет собой весомую альтернативу подходу, основанному на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса.

Для дальнейшего развития современных подходов к моделированию турбулентности немаловажным представляется вопрос о создании соответствующей методической и информационной базы, включающей результаты численного решения тестовых задач механики жидкости и газа, для которых имеются надежные и подробно документированные экспериментальные и численные результаты (например, течение в каверне с подвижной крышкой, течение за обратным уступом, течение в канале с твердыми стенками и канале с распределенным вдувом,

обтекание кругового цилиндра и ряда других), а также выработка рекомендаций по выбору подсеточной модели для решения конкретной задачи или обоснованию такого выбора.

Достаточно большой интерес представляют собой подбор и разработка тестовых задач для проверки качества и универсальности вычислительной процедуры, способов постановки начальных и граничных условий. В качестве одного из таких тестов можно предложить течение за фрактальной решеткой (решетка увеличивающейся сложности), например, за решеткой, отверстия которой описываются несколькими итерациями кривой Коха. Несомненный интерес представляет также дальнейшее тестирование подхода для канонических течений и сравнение результатов расчетов с данными прямого численного моделирования и результатами измерений.

Исследования, направленные на более глубокое осмысление современных подходов к моделированию турбулентных течений и решение технических вопросов, связанных с их практическим использованием, продолжаются.

Список литературы

1. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — М.: Мир, 1990. — 726 с.
2. *Анисимов В.А., Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н.* Моделирование задач внутренней баллистики энергоустановок средствами современных вычислительных пакетов // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8, № 3. С. 327–335.
3. *Белов И.А., Исаев С.А.* Моделирование турбулентных течений. — СПб: Изд-во БГТУ, 2001. — 108 с.
4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Физматлит, 1994. — 444 с.
5. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М.* Турбулентность: новые подходы. — М.: Наука, 2002. — 286 с.
6. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. — М.: Физматлит, 1995. — 368 с.
7. *Бондаренко Ю.А., Башуров В.В., Янилкин Ю.В.* Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой газодинамики. Обзор зарубежной литературы. Препринт РФЯЦ ВНИИЭФ 88-2003. — 2003. — 54 с.
8. *Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р.* Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. — М.: Физматлит, 2003. — 352 с.
9. *Волков К.Н.* Взаимодействие круглой турбулентной струи с плоской преградой // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 1. С. 55–67.
10. *Волков К.Н.* Граничные условия на стенке и сеточная зависимость решения в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 211–223.
11. *Волков К.Н.* Дискретизация конвективных потоков в уравнениях Навье–Стокса на основе разностных схем высокой разрешающей способности // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т. 5. С. 129–145.
12. *Волков К.Н.* Моделирование крупных вихрей взаимодействия круглой турбулентной струи с преградой // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 2. С. 3–22.
13. *Волков К.Н.* Моделирование крупных вихрей полностью развитого турбулентного течения в канале и сравнение моделей подсеточной вихревой вязкости // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 3. С. 31–42.

14. *Волков К.Н.* Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. С. 43–60.
15. *Волков К.Н.* Применение средств параллельного программирования для решения задач механики жидкости и газа на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 69–84.
16. *Волков К.Н.* Пристеночное моделирование в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках // Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 14, № 1. С. 113–129.
17. *Волков К.Н.* Разностные схемы расчета потоков повышенной разрешающей способности и их применение для решения задач газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. С. 146–167.
18. *Волков К.Н.* Разработка и реализация алгоритмов численного решения задач механики жидкости и газа // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 8. С. 40–56.
19. *Волков К.Н.* Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. С. 269–282.
20. *Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н.* Моделирование внутренней газодинамики ракетных двигателей твердого топлива на основе средств пакета STAR-CD // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79, № 4. С. 50–56.
21. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Аэрооптические эффекты в турбулентном потоке // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 3. С. 1–7.
22. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Математические модели трехмерных турбулентных течений в каналах со вдувом // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 10. С. 41–63.
23. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Метод моделирование крупных вихрей в приложении к проблемам внутренней газодинамики РДТТ // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8, № 2. С. 198–208.
24. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй и следов. — М.: Машиностроение, 1969. — 400 с.
25. *Горшков Г.Ф.* Распространение спутных неизотермических струй газа и плазмы переменного состава // Динамика неоднородных и сжимаемых сред. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. — С. 164–175.
26. *Ерошенко В.М., Зайчик Л.И.* Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. — М.: Наука, 1984. — 276 с.
27. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие граничные условия на границах расчетной области. — М.: Физматлит, 2003. — 240 с.
28. *Илюшин Б.Б., Красинский Д.В.* Моделирование динамики турбулентной круглой струи методом крупных вихрей // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 1. С. 49–61.
29. *Исаев С.А., Баранов П.А., Кудрявцев Н.А., Жукова Ю.В.* Численное моделирование нестационарного теплообмена при турбулентном обтекании кругового цилиндра. Ч. 1. Методическое исследование // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 1. С. 27–39.

30. *Исаев С.А.*, *Баранов П.А.*, *Кудрявцев Н.А.*, *Жукова Ю.В.* Численное моделирование нестационарного теплообмена при турбулентном обтекании кругового цилиндра. Ч. 2. Анализ автоколебательного режима // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 2. С. 271–283.

31. *Котеров В.Н.*, *Савельев А.Д.*, *Толстых А.И.* Численное моделирование аэрооптических полей около приемного порта воздушной обсерватории // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 1. С. 27–39.

32. *Кукес В.И.*, *Ярин Л.П.* Исследование турбулентного переноса тепла в неизотермических струях // Материалы V Всесоюзной конференции по тепломассообмену. — Минск: Изд-во ИТМО АН БССР, 1976. — Т. 1. — С. 167–171.

33. *Любимов Д.А.* Возможности использования прямых методов для численного моделирования турбулентных струй // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 3. С. 14–20.

34. *Монин А.С.*, *Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. — СПб: Гидрометеоиздат, 1992. — 696 с.

35. *Монин А.С.*, *Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 2. — СПб: Гидрометеоиздат, 1996. — 744 с.

36. *Никитин Н.В.*, *Павельев А.А.* Турбулентные течения в канале с проницаемыми стенками. Результаты прямого численного моделирования и трехпараметрической модели // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 18–26.

37. *Райзберг Б.А.*, *Ерохин Б.Т.*, *Самсонов К.П.* Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. — М.: Машиностроение, 1972. — 384 с.

38. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Еримишина, С.А. Исаева. — М.; СПб, 2001. — 360 с.

39. *Устименко Б.П.*, *Змейков В.Н.*, *Шишкин А.А.*, *Ривин Б.О.* О влиянии степени неизотермичности потока на характеристики струйного течения // Турбулентные струйные течения. — Таллин: Изд-во ИТЭФ АН ЭССР, 1985. — С. 21–26.

40. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. — М.: Мир, 1991.

41. *Хинце И.О.* Турбулентность: ее механизм и теория. — М.: Физматлит, 1963. — 680 с.

42. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А.М. Липанов, Ю.Ф. Кисаров, И.Г. Ключников. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. — 160 с.

43. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

44. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 711 с.

45. *Abba A.*, *Cercignani C.*, *Valdettaro L.*, *Zanini P.* LES of thermal convection and investigation in soft / hard turbulent regimes // Proceedings of the 2nd ERCOFTAC Workshop, Grenoble, France, September 16–19, 1996. 1997. P. 147–156.

46. *Abdel Gawad A. F., Ragab S. A., Luton A., Abdel Latif O. E.* Large eddy simulation for fully developed flow in a square duct — ASME Paper. № 97-3161. — 10 p.

47. *Abdon A., Sunden B.* Numerical simulation of turbulent impingement cooling — ASME Paper. № 2001-GT-0150. — 12 p.

48. *Adams N. A., Stolz S.* A subgrid-scale deconvolution approach for shock capturing // Journal of Computational Physics. 2002. V. 178, No. 2. P. 391–426.

49. *Adams N. A., Stolz S.* On the approximate deconvolution procedure for LES // Physics of Fluids. 1999. V. 11, No. 7. P. 1699–1701.

50. *Aider J.-L., Danet A.* Large-eddy simulation of upstream boundary conditions influence upon a backward-facing step flow // Comptes Rendus Mecanique. 2006. V. 334, No. 7. P. 447–453.

51. *Akhavan R., Ansari A., Kang S., Mangiavacchi N.* Subgrid-scale interactions in a numerically simulated planar turbulent jet and implications for modeling // Journal of Fluid Mechanics. 2000. V. 408. P. 83–120.

52. *Akselvoll K., Moin P.* Large eddy simulation of turbulent confined coannular jets and turbulent flow over a backward facing step. — Stanford University. — 1995. — Report № TF-63.

53. *Alvelius K.* Studies of turbulence and its modelling through large eddy- and direct numerical simulation. — Doctoral Thesis. — KTH/MEK/TR-99-09-SE. — 1999.

54. *Amano R. S., Brandt H.* Numerical study of turbulent axisymmetric jets impinging on a flat plate and flowing into an axisymmetric cavity // Journal of Fluids Engineering. 1984. V. 106, No. 4. P. 410–417.

55. *Amano R., Sugiyama S.* Investigation on turbulent heat transfer of an axisymmetric jet impinging on a flat plate // Bulletin of the JSME. V. 28, No. 235. P. 74–79.

56. *Anderson R., Meneveau C.* Effects of the similarity model in finite-difference les of isotropic turbulence using a lagrangian dynamic mixed model // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 62, No. 3. P. 201–225.

57. *Antoine Y., Lemoine F., Lebouche M.* Turbulent transport of a passive scalar in a round jet discharging into a co-flowing stream // European Journal of Mechanics. B / Fluids. 2001. V. 20, No. 2. P. 275–301.

58. *Antonia R. A., Prabhu A., Stephenson S. E.* Conditionally sampled measurements in a heated turbulent jet // Journal of Fluid Mechanics. 1975. V. 72. P. 455–480.

59. Application of large eddy simulation to the solution of industrial problems: validation report // AEA Technology Engineering Software. — 2002. — Report No. EP-28189.

60. *Ashforth-Frost S., Jambunathan K.* Numerical prediction of semi-confined jet impingement and comparison with experimental data // International Journal of Numerical Methods in Fluids. 1996. V. 23, No. 3. P. 295–306.

61. *Bagwell T. G., Adrian R. J., Moser R. D., Kim J.* Improved approximation of wall shear stress boundary conditions for large-eddy simulation // Near-wall Turbulent Flows / Edited by C. G. Speziale, B. E. Launder. — Amsterdam: Elsevier, 1993. — P. 265–275.

62. *Balaras E., Benocci C., Piomelli U.* Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations // AIAA Journal. 1996. V. 34, No. 6. P. 1111–1119.
63. *Bardina J., Ferziger J. H., Reynolds W. C.* Improved subgrid scale models for large eddy simulation. — AIAA Paper. No. 80-1357. — 16 p.
64. *Barth T. J.* Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations // VKI Lecture Series 1994-05. — Von Karman Institute for Fluid Dyanmics, 1994.
65. *Basu D., Hamed A., Das K.* DES, hybrid RANS / LES and PANS models for unsteady separated turbulent flow simulations // Proceedings of FEDSM-05 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting and Exhibition, Houston, Texas, USA, 19–23 June 2005. — 6 p.
66. *Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S.* Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation // AIAA Journal. 2004. V. 42, No. 3. P. 485.
67. *Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S.* LNS — an approach towards embedded LES. — AIAA Paper. No. 2002-0427. — 10 p.
68. *Bauer W., Haag O., Hennecke D. K.* Accuracy and robustness of nonlinear eddy viscosity models // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21. No. 3. P. 312–319.
69. *Baughn J., Hechanova A., Yan X.* An experimental study of entrainment effects on the heat transfer from a flat surface to a heated circular impinging jet // Journal of Heat Transfer. 1991. V. 113. P. 1023–1025.
70. *Baughn J., Shimizu S.* Heat transfer measurements from a surface with uniform heat flux and an impinging jet // Journal of Heat Transfer. 1989. V. 111. P. 1096–1098.
71. *Behnia M., Parneix S., Durbin P. A.* Prediction of heat transfer in an axisymmetric turbulent jet impinging on a flat plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. V. 41, No. 13. P. 1845–1855.
72. *Behnia M., Parneix S., Durbin P.* Simulations of the jet impingement heat transfer with the k–e–v^2 model. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1996. — P. 3–16.
73. *Bernal L. P., Roshko A.* Streamwise vortex structure in plane mixing layers // Journal of Fluid Mechanics. 1986. V. 170. P. 499–525.
74. *Bodony D. J., Lele S. K.* Large eddy simulation of turbulent jets and progress towards a subgrid scale turbulence model // Proceedings of International Workshop on LES for Acoustics, Göttingen, Germany, 7–8 October 2002. — 12 p.
75. *Boersma B. J., Lele S. K.* Large eddy simulation of compressible turbulent jets. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1999. — P. 365–377.
76. *Bogey C., Bailly C.* Effects of inflow conditions and forcing on subsonic jet flows and noise // AIAA Journal. 2005. V. 43, No. 5. P. 1000–1007.
77. *Bogey C., Bailly C.* Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. V. 27, No. 4. P. 603–610.
78. *Bolot R., Imbert M., Coddet C.* On the use of a low-Reynolds extension to the Chen-Kim (k–ε) model to predict thermal exchanges in the case of an

impinging plasma jet // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44, No. 6. P. 1095–1106.

79. *Boris J.P., Grinstein F.F., Oran E.S., Kolbe R.L.* New insights into large eddy simulation // Fluid Dynamics Research. 1992. V. 10, No. 2. P. 199–228.
80. *Bouainouche M., Bourabaa N., Desmet B.* Numerical study of the wall shear stress produced by the impingement of a plane turbulent jet on a plate // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. 1997. V. 7, No. 5–6. P. 548–564.
81. *Bou-Zeid E., Meneveau C., Parlange M.* A scale-dependent Lagrangian dynamic model for large eddy simulation of complex turbulent flows // Physics of Fluids. 2005. V. 17, No. 2. — 18 p.
82. *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Mathematics of Computation. 1977. V. 31. P. 46–50.
83. *Breuer M.* A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1998. V. 21, No. 5. P. 648–654.
84. *Breuer M.* Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. V. 28, No. 9. P. 1281–1302.
85. *Breuer M.* Numerical and modeling influences on large eddy simulations for the flow past a circular cylinder // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1998. V. 19, No. 5. P. 512–521.
86. *Brown A.R., Derbyshire S.H., Mason P.J.* Large-eddy simulation of stable atmospheric boundary layers with a revised stochastic subgrid model // Quarterly Journal of Royal Meteorology Society. 1994. V. 120, No. 520. P. 1485–1512.
87. *Brown G.L., Roshko A.* On density effects and large structures in turbulent mixing layers // Journal of Fluid Mechanics. 1974. V. 64. P. 775–816.
88. *Browne L.W.B., Antonia R.A., Chambers A.J.* The interaction region of a turbulent plane jet // Journal of Fluid Mechanics. 1984. V. 149. P. 355–373.
89. *Bui T.T.* A parallel, finite-volume algorithm for large-eddy simulation of turbulent flows // Computers and Fluids. 2002. V. 29, No. 8. P. 877–915.
90. *Cabot W.* Large-eddy simulation with wall models. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 2000. — P. 241–250.
91. *Cabot W.H.* Near-wall models in largeeddy simulations of flow behind a backwardfacing step. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1996. — P. 199–210.
92. *Camarri S., Salvetti M., Koobus B., Dervieux A.* A low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids // Computers and Fluids. 2004. V. 33, No. 9. P. 1101–1129.
93. *Cantwell B., Coles D.* An experimental study on entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1983. V. 136. P. 321–374.
94. *Canuto V.M., Cheng Y.* Determination of the Smagorinsky–Lilly constant C_S // Physics of Fluids. 1997. V. 9, No. 5. P. 1368–1378.
95. *Carati D.* Perspectives for ensemble average LES. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1997. — P. 107–112.

96. *Carati D., Eijnden E.V.* On the self-similarity assumption in dynamic models for large eddy simulation // Physics of Fluids. 1997. V.9, No.7. P.2165–2167.
97. *Carati D., Winckelmans G.S., Jeanmart H.* On the modelling of the subgrid-scale and filtered-scale stress tensors in large-eddy simulation // Journal of Fluid Mechanics. 2001. V.441. P.119–138.
98. *Chakravarthy S.R., Osher S.* A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. — AIAA Paper. No.85-0363. — 11 p.
99. *Chakravarthy V.K., Menon S.* Subgrid modeling of turbulent premixed flames in the flamelet regime // Flow, Turbulence and Combustion. 2000. V.65, No.2. P.133–161.
100. *Chaouat B.* Numerical simulation of channel flows with fluid injection using Reynolds stress model. — AIAA Paper. No.2000-0992. — 18 p.
101. *Chapman D.R.* Computational aerodynamics, development and outlook // AIAA Journal. 1979. V.17, No.12. P.1293–1313.
102. *Chassaing P., Harran G., Joly L.* Density fluctuation correlations in free turbulent binary mixing // Journal of Fluid Mechanics. 1994. V.279. P.239–278.
103. *Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S.* A connection between the Camassa–Holm equations and turbulence flows in pipes and channels // Physics of Fluids. 1999. V.11, No.8. P.2343–2353.
104. *Chester S., Charlette F., Meneveau C.* Dynamic turbulence model for large eddy simulations without test-filtering: quantifying the accuracy of Taylor series approximations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2001. V.15, No.3. P.165–181.
105. *Chevray R., Tutu N.K.* Intermittency and preferential transport of heat in a round jet // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V.88. P.133–160.
106. *Chollet J.-P., Lesieur M.* Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closure // Journal of the Atmospheric Sciences. 1981. V.38, No.12. P.2747–2757.
107. *Chow F.K., Moin P.* A further study of numerical errors in large-eddy simulations // Journal of Computational Physics. 2003. V.184, No.2. P.366–380.
108. *Chow F.K., Street R.L., Xue M., Ferziger J.H.* Explicit filtering and reconstruction turbulence modeling for large-eddy simulation of neutral boundary layer flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 2005. V.62, No.7. P.2058–2077.
109. *Chua L.P., Antonia R.A.* Turbulent Prandtl number in a circular jet // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1990. V.33, No.2. P.331–339.
110. *Chung Y.M., Luo K.H.* Unsteady heat transfer analysis of an impinging jet // Journal of Heat Transfer. 2002. V.124. P.1039–1048.
111. *Chung Y.M., Luo K.H., Sandham N.D.* Numerical study of momentum and heat transfer in unsteady impinging jets // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2002. V.23, No.5. P.592–600.
112. *Chung Y.M., Sung H.J.* Comparative study of inflow conditions for sptially evolving simulation // AIAA Journal. 1997. V.35. No.2. P.269–274.
113. *Chung Y.M., Sung H.J., Krogstad P.A.* Modulation of near-wall turbulence structure with wall blowing and suction // AIAA Journal. 2002. V.40. No.8. P.1529–1535.

114. *Ciardi M., Sagaut P., Klein M., Dawes W.N.* A dynamic finite volume scheme for large-eddy simulation on unstructured grids // Journal of Computational Physics. 2005. V. 210, No. 1. P. 632–655.
115. *Ciucci A., Iaccarino G., Moser R., Najjar F., Durbin P.* Simulation of rocket motor internal flows with turbulent mass injection. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1998. — P. 245–266.
116. *Clark R.A., Ferziger J.H., Reynolds W.C.* Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow // Journal of Fluid Mechanics. 1979. V. 91. P. 1–16.
117. *Collis S.S.* Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 2002. — P. 155–167.
118. *Collucci D.W., Viskanta R.* Effect of nozzle geometry on local convective heat transfer to a confined impinging air jet // Experimental Thermal and Fluid Science. 1996. V. 13, No. 1. P. 71–80.
119. *Comte P., Lesieur M.* Large-eddy simulation of compressible turbulent flows // Advances in Turbulence Modeling. — Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Ste-Genese, Belgium, 1998. — P. 4.1–4.133.
120. *Constantinescu G., Chapelet M., Squires K.D.* On turbulence modeling applied to flow over a sphere // AIAA Journal. 2003. V. 41, No. 9. P. 1733–1742.
121. *Constantinescu G., Pacheco R., Squires K.D.* Detached-eddy simulation of flow over a sphere. — AIAA Paper. No. 2002-0425. — 8 p.
122. *Constantinescu G.S., Squires K.D.* LES and DES investigations of turbulent flow over a sphere. — AIAA Paper. No. 2000-0540. — 11 p.
123. *Cook A.W.* Determination of the constant coefficient in scale similarity models of turbulence // Physics of Fluids. 1997. V. 9, No. 5. P. 1485–1487.
124. *Cooper D., Jackson D., Launder B., Liao G.* Impinging jet studies for turbulence model assessment. Flow-field experiments // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1993. V. 36. No. 10. P. 2675–2684.
125. *Craft T.J., Gant S.E., Iacovides H., Launder B.E.* A new wall function strategy for complex turbulent flows // Numerical Heat Transfer. 2005. V. 45. P. 301–318.
126. *Craft T.J., Graham L.J.W., Launder B.E.* Impinging jet studies for turbulence model assessment. An examination of the performance of four turbulence models // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1993. V. 36, No. 10. P. 2685–2697.
127. *Craft T.J., Iacovides H., Yoon J.H.* Progress in the use of non-linear two-equation models in the computation of convective heat-transfer in impinging and separated flows // Flow, Turbulence and Combustion. 2000. V. 63, No. 1–4. P. 59–80.
128. *Crumpton P.I.* A cell vertex method for 3d Navier–Stokes solutions. — Oxford University Computing Laboratory. Technical Report No. NA-93/09. — University of Oxford, 1993.
129. *Crumpton P.I., Giles M.B.* Implicit time accurate solutions on unstructured dynamic grids — AIAA Paper. No. 95-671. — 23 p.
130. *Crumpton P.I., Moinier P., Giles M.B.* An unstructured algorithm for high Reynolds number flows on highly stretched grids // Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent

Flows, University of Wales, Swansea, United Kingdom, 21–25 July 1997. — 10 p.

131. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport equations in turbulence // Physics of Fluids. 1970. V. 13, No. 11. P. 2634–2649.
132. *Davidson L.* LES of recirculating flow without any homogeneous direction: a dynamic one-equation subgrid model // Proceedings of the 2nd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Delft, Netherlands, 9–12 June 1997. — Delft University Press, 1997. — P. 481–490.
133. *Davidson L., Billson M.* Hybrid LES-RANS using synthesized turbulent fluctuations for forcing in the interface region // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. V. 27, No. 6. P. 1028–1042.
134. *Davidson L., Peng S.-H.* Hybrid LES-RANS: a one-equation SGS model combined with a k–ω model for predicting recirculating flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. V. 43, No. 9. P. 1003–1018.
135. *Deardoff J. W.* A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1970. V. 41. P. 453–480.
136. *Des-Jardin P.E., Frankel S.H.* Two-dimensional large eddy simulation of soot formation in the near-field of a strongly radiating non-premixed acetylene-air turbulent jet flame // Combustion and Flame. 1999. V. 119, No. 1–2. P. 121–132.
137. *Devesa A., Moreau J. Hélie, Faivre V., Poinsot T.* Initial conditions for large eddy simulations of piston engine flows // Computers and Fluids. 2007. V. 36, No. 4. P. 701–713.
138. *Dimotakis P.E., Catrakis H.J., Fourguette D.C.* Flow structure and optical beam propagation in high-Reynolds-number gas-phase shear layers and jets // Journal of Fluid Mechanics. 2001. V. 433. P. 105–134.
139. *Diurno G. V., Balaras E., Piomelli U.* Wall-layer models for LES of separated flows // Modern simulation strategies for turbulent flows / Edited by B. Geurts. — Philadelphia: Edwards, 2001. — P. 157–174.
140. *Domaradzki J.A., Holm D.D.* Navier–Stokes-alpha model: LES equations with nonlinear dispersion // ERCOFTAC Bulletin. 2001. V. 48. P. 22–25.
141. *Dowling D.R., Dimotakis P.E.* Similarity of the concentration field of gas-phase turbulent jets // Journal of Fluid Mechanics. 1990. V. 218. P. 109–141.
142. *Druault P., Lardeau S., Bonnet J.-P., Coiffet F., Delville J., Lamballais E., Largeau J.-F., Perret L.* Generation of three-dimensional turbulent inlet conditions for large-eddy simulation // AIAA Journal. 2004. V. 42, No. 3. P. 447–456.
143. *Ducros F., Comte P., Lesieur M.* Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate // Journal of Fluid Mechanics. 1996. V. 326. P. 1–36.
144. *Ducros F., Ferrand V., Nicoud F., Weber C., Darracq D., Gacherieu C., Poinsot T.* Large-eddy simulation of the shock-turbulence interaction // Journal of Computational Physics. 1999. V. 152, No. 2. P. 517–549.
145. *Ducros F., Nicoud F., Poinsot T.* A wall-adapting local eddy-viscosity model for simulations in complex geometries // Proceedings of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Oxford, United Kingdom, 31 March — 2 April 1998. — P. 293–299.

146. *Durbin P.A.* On the k–ε stagnation point anomaly // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1996. V. 17, No. 1. P. 89–90.
147. *Durbin P.A.* Separated flow computations with the k–ε–v^2 model // AIAA Journal. 1995. V. 33, No. 4. P. 659–664.
148. *Elliott G.S., Samimy M.* Compressibility effects in free shear layers // Physics of Fluids. 1990. V. 2, No. 7. P. 1231–1240.
149. *Erlebacher G., Hussaini M.Y., Speziale C.G., Zang T.A.* Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics. 1992. V. 238. P. 155–185.
150. *Farge M., Schneider K.* Coherent vortex simulation (CVS), a semi-deterministic turbulence model using wavelets // Flow, Turbulence and Combustion. 2001. V. 66, No. 4. P. 393–426.
151. *Freund J.B., Moin P., Lele S.K.* Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer // Flow Physics and Computation Division. Technical Report TF-72. — Stanford University, 1997.
152. *Fureby C.* On subgrid scale modeling in large eddy simulation of compressible fluid flow // Physics of Fluids. 1995. V. 8, No. 5. P. 1301–1311.
153. *Fureby C., Grinstein F.F.* Large eddy simulation of high-Reynolds-number free and wall-bounded flows // Journal of Computational Physics. 2002. V. 181, No. 1. P. 68–97.
154. *Fureby C., Grinstein F.F.* Monotonically integrated large eddy simulation of free shear flows // AIAA Journal. 1999. V. 37, No. 5. P. 544–556.
155. *Fureby C., Tabor G., Weller H.G., Gosman A.D.* Large eddy simulation of the flow around a square prism // AIAA Journal. 2000. V. 38, No. 3. P. 442–452.
156. *Gao F., O'Brien E.E.* A large-eddy simulation scheme for turbulent reacting flows // Physics of Fluids. 1993. V. 5, No. 6. P. 1282–1284.
157. *Garimella S.V., Nenaydykh B.* Nozzle-geometry effects in liquid jet impingement heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39, No. 14. P. 2915–2923.
158. *Gazzah M.H., Sassi M., Sarh B., Gokalp I.* Numerical simulation of variable density subsonic turbulent jets by using the k–ε model // International Journal of Thermal Sciences. 2002. V. 41, No. 1. P. 51–62.
159. *Germano M.* A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier–Stokes equations // Physics of Fluids. 1986. V. 29, №7. P. 2323–2324.
160. *Germano M.* Turbulence: the filtering approach // Journal of Fluid Mechanics. 1992. V. 238. P. 325–336.
161. *Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // Physics of Fluids. 1991. V. 3, No. 7. P. 1760–1765.
162. *Geurts B.J., Holm D.D.* Regularization modeling for large-eddy simulation // Physics of Fluids. 2003. V. 15, No. 1. P. L13–L16.
163. *Ghosal S.* An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence // Journal of Computational Physics. 1996. V. 125, No. 1. P. 187–206.
164. *Ghosal S., Lund T.S., Moin P., Akselvoll K.* A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 286. P. 229–255.

165. *Ghosal S., Rogers M.M.* A numerical study of self-similarity in a turbulent plane wake using large-eddy simulation. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1996. — P. 257–279.
166. *Gicquel L.Y.M., Givi P., Jaberi F.A., Pope S.B.* Velocity filtered density function for large eddy simulation of turbulent flows // Physics of Fluids. 2002. V. 14, No. 3. P. 1196–1213.
167. *Girimaji S.S.* Partially-averaged Navier–Stokes model for turbulence: a Reynolds-averaged Navier–Stokes to direct numerical simulation bridging method // Journal of Applied Mechanics. 2006. V. 73, No. 3. P. 413–421.
168. *Girimaji S.S., Jeong E., Srinivasan R.* Partially averaged Navier–Stokes method for turbulence: fixed point analysis and comparison with unsteady partially averaged Navier–Stokes // Journal of Applied Mechanics. 2006. V. 73, No. 3. P. 422–429.
169. *Goebel S.G., Dutton J.C.* Experimental study of compressible turbulent mixing layers // AIAA Journal. 1991. V. 29, No. 4. P. 538–546.
170. *Gordeyev S., Jumper E.J.* The optical environment of a cylindrical turret with a flat window and the impact of passive control devices. — AIAA Paper. No. 2005-4657. — 14 p.
171. *Grinstein F.F., Fureby C.* Recent progress on MILES for high Reynolds number flows // Journal of Fluids Engineering. 2002. V. 124, No. 4. P. 848–861.
172. *Gullbrand J.* Grid-independent large-eddy simulation in turbulent channel flow using three-dimensional explicit filtering. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 2003. — P. 331–342.
173. *Gullbrand J., Chow F.K.* The effect of numerical errors and turbulence models in large-eddy simulations of channel flow, with and without explicit filtering // Journal of Fluid Mechanics. 2003. V. 495. P. 323–341.
174. *Habli S., Mhiri H., Golli S.E., Palec G.L., Bournot P.* Numerical study of inflow conditions on an axisymmetric turbulent jet // International Journal of Thermal Sciences. 2001. V. 40, No. 5. P. 497–511.
175. *Hackbusch W.* Multi-grid convergence theory // Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — No. 960. — P. 177–219.
176. *Heyerichs K., Pollard A.* Heat transfer in separated and impinging turbulent flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39, No. 12. P. 2385–2400.
177. *Hilgers A.* Control and optimization of turbulent jet mixing. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 2000. — P. 45–54.
178. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1990.
179. *Holmen J., Hughes T.J.R., Oberai A.A., Wells G.N.* Sensitivity of the scale partition for the variational multiscale large-eddy simulation of channel flow // Physics of Fluids. 2004. V. 16, No. 3. P. 824–827.
180. *Hongrui G., Shiyi C., Gouwei H., Nianzhen C.* A second-order dynamic subgrid-scale stress model // Applied Mathematics and Mechanics. 2000. V. 21, No. 2. P. 165–172.
181. *Hoogendoorn C.J.* The effect of turbulence on heat transfer at stagnation point // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1977. V. 20, No. 12. P. 1333–1338.

182. *Horiuti K.* Backward scatter of subgrid-scale energy in wall-bounded and free shear turbulence // Journal of Physical Society of Japan. 1997. V. 66, No. 1. P. 91–107.

183. *Huang P.G., Coleman G.N., Bradshaw P.* Compressible turbulent channel flows: DNS results and modeling // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 305. P. 185–218.

184. *Hughes T.J.R., Mazzei L., Jansen K.E.* Large eddy simulation and the variational multiscale method // Computing and Visualization in Science. 2000. V. 3, No. 1–2. P. 47–59.

185. *Hughes T.J.R., Mazzei L., Oberai A.A., Wray A.A.* The multiscale formulation of large eddy simulation: decay of homogeneous isotropic turbulence // Physics of Fluids. 2001. V. 13, No. 2. P. 505–512.

186. *Hyun G.-S., Nogami M., Senda J., Fujimoto H.* Study on unsteady gas jet and wall impingement jet. Comparison of experimental results with numerical analysis by discrete vortex method // JSAE Review. 1996. V. 17. P. 347–354.

187. *Inagaki M., Kondoh T., Nagano Y.* A mixed-time-scale sgs model with fixed model-parameters for practical LES // Journal of Fluids Engineering. 2005. V. 127, No. 1. P. 1–13.

188. *Jaberi F.A., Colucci P.J., James S., Givi P., Pope S.B.* Filtered mass density function for large eddy simulation of turbulent reacting flows // Journal of Fluid Mechanics. 1999. V. 401. P. 85–121.

189. *Jambunathan K., Lai E., Moss M.A., Button B.L.* A review of heat transfer for single circular jet impingement // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1992. V. 13, No. 4. P. 106–115.

190. *Jameson A.* Transonic aerofoil calculations using the Euler equations // Proceedings of IMA Conference on Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics, Reading, United Kingdom, March 1981. — Academic Press, 1982. — P. 289–308.

191. *Jameson A., Mavripils D.* Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh. — AIAA Paper. No. 85-0435. — 12 p.

192. *Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., Prosser R.* A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. V. 27, No. 4. P. 585–593.

193. *Jiroveanu D., Cottet G.-H., Michaux B.* Some numerical results with a selective eddy-viscosity model for large-eddy simulations // Annals of University of Craiova. 2003. V. 30, No. 1. P. 154–161.

194. *Jumper E.J., Fitzgerald E.J., Recent E.J.* advances in aero-optics // Progress in Aerospace Sciences. 2001. V. 37, No. 3. P. 299–339.

195. *Kaltenbach H.-J., Choi H.* Large-eddy simulation of flow around an airfoil on a structured mesh. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1995. — P. 51–60.

196. *Kaneda Y., Ishihara T., Yokokawa M., Itakura K., Uno A.* Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box // Physics of Fluids. 2003. V. 15, No. 2. P. L21–L24.

197. *Katopodes F.V., Street R.L., Ferziger J.H.* Subfilter-scale scalar transport for large-eddy simulation // Proceedings of the 14th Symposium on Boundary Layers and Turbulence, Aspen, Colorado, USA, 7–11 August 2000. — American Meteorological Society, 2000. — P. 472–475.
198. *Keating A., Piomelli U., Balaras E., Kaltenbach H.-J.* A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation // Physics of Fluids. 2004. V. 16, No. 12. P. 4696–4706.
199. *Kim W., Menon S.* A new dynamic one-equation subgrid-scale model for large eddy simulation. — AIAA Paper. No. 95-0356. — 9 p.
200. *Kim J., Moin P., Moser R.* Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 1987. V. 177. P. 133–166.
201. *Klein M., Sadiki A., Janicka J.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // Journal of Computational Physics. 2003. V. 186, No. 2. P. 652–665.
202. *Knight D., Zhou G., Okongó N., Shukla V.* Compressible large eddy simulation using unstructured grids. — AIAA Paper. No. 98-0535. — 14 p.
203. *Kobayashi T.* Large eddy simulation for engineering applications // Fluid Dynamics Research. 2006. V. 38, No. 2–3. P. 84–107.
204. *Kogaki T., Kobayashi T., Taniguchi N.* Large eddy simulation of flow around a rectangular cylinder // Fluid Dynamics Research. 1997. V. 20, No. 1–6. P. 11–24.
205. *Kondo K., Murakami S., Mochida A.* Generation of velocity fluctuations for inflow boundary conditions of LES // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. V. 67–68. P. 51–64.
206. *Kosovic B.* Subgrid-scale modelling for the large-eddy simulation of high-Reynolds-number boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. 1997. V. 336. P. 151–182.
207. *Kourta A.* Instability of channel flow with fluid injection and parietal vortex shedding // Computers and Fluids. 2004. V. 33, No. 2. P. 155–178.
208. *Kravchenko A.G., Moin P.* Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re_D = 3900$ // Physics of Fluids. 2000. V. 12, No. 2. P. 403–417.
209. *Kraichnan R.H.* Eddy viscosity in two and three dimensions // Journal of the Atmospheric Sciences. 1976. V. 33, No. 8. P. 1521–1536.
210. *Kwak D., Reynolds W.C., Ferziger J.H.* Numerical simulation of turbulent flow. — Department of Mechanical Engineering. Report No. TF-5. — Stanford University, 1975.
211. *Ladeinde F., Liu W.* O'Brien E.E. Turbulence in compressible mixing layers // Journal of Fluids Engineering. 1998. V. 120, No. 1. P. 48–53.
212. *Lau J.C.* Effects of exit Mach number and temperature on meanflow and turbulence characteristics in round jets // Journal of Fluid Mechanics. 1981. V. 105. P. 193–218.
213. *Leboeuf R.L., Mehta R.D.* On using Taylor's hypothesis for three-dimensional mixing layers // Physics of Fluids. 1995. V. 7, No. 6. P. 1516–1518.
214. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // Journal of Computational Physics. 1992. V. 103, No. 1. P. 16–42.
215. *Lele S.K.* Direct numerical simulation of compressible free shear flows. — AIAA Paper. No. 89-0374. — 16 p.

216. *Leonard A.* Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows // Advances in Geophysics. 1974. V. 18. P. 237–248.

217. *Leonard S., Terracol M., Sagaut P.* Commutation error in LES with time-dependent filter width // Computers and Fluids. 2007. V. 36, No. 3. P. 513–519.

218. *Lesieur M., Metais O.* New trends in large-eddy simulations of turbulence // Annual Review of Fluid Mechanics. 1996. V. 28. P. 45–82.

219. *Li N., Balaras E., Piomelli U.* Inflow conditions for large-eddy simulations of mixing layers // Physics of Fluids. 2000. V. 12, No. 4. P. 935–938.

220. *Li Q., Fu S.* Numerical simulation of high-speed planar mixing layer // Computers and Fluids. 2003. V. 32, No. 10. P. 1357–1377.

221. *Lilly D.K.* A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // Physics of Fluids. 1991. V. 4, No. 3. P. 633–635.

222. *Lilly D.K.* On the numerical simulation of buoyant convection // Tellus. 1962. V. 14, No. 2. P. 148–172.

223. *Liu S., Meneveau C., Katz J.* Experimental study of similarity subgrid-scale models of turbulence in the far-field of a jet // Applied Scientific Research. 1995. V. 54, No. 3. P. 177–190.

224. *Liu S., Meneveau C., Katz J.* On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet // Journal of Fluid Mechanics. 1994. V. 275. P. 83–119.

225. *Liu T., Sullivan J.P.* Heat transfer and flow structures in an excited circular impinging jet // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39, No. 17. P. 3695–3706.

226. *Lu X., Dalton C., Zhabg J.* Application of large eddy simulation on flow past a circular cylinder // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 1997. V. 119. P. 219–225.

227. *Lubcke H., Schmidt St. Rung T. Thiele F.* Comparison of LES and RANS in bluff-body flows // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2001. V. 89, No. 14–15. P. 1471–1485.

228. *Lund T.S., Kaltenbach H.-J.* Experiments with explicit filtering for LES using a finite-difference method. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1995. — P. 91–105.

229. *Lund T., Wu X., Squires K.D.* Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations // Physics of Fluids. 1998. V. 10, No. 1. P. 233–238.

230. *Lytle D., Webb B.* Air jet impingement heat transfer at low nozzle-plate spacings // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1994. V. 37, No. 2. P. 1687–1697.

231. *Madabhushi R.K., Vanka S.P.* Large eddy simulation of turbulent-driven secondary flow in a square duct // Physics of Fluids. 1991. V. 3, No. 11. P. 2734–2745.

232. *Mahesh K., Constantinescu G., Moin P.* A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries // Journal of Computational Physics. 2004. V. 197, No. 1. P. 215–240.

233. *Majander P., Siikonen T.* Evaluation of Smagorinsky-based subgrid-scale models in a finite-volume computation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2002. V. 40, No. 6. P. 735–774.

234. *Marsden A.L., Vasilyev O.V.* Communative filters for LES on unstrutured meshes. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1999. — P. 389–402.

235. *Marsden A.L., Vasilyev O.V., Moin P.* Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2002. V. 175, No. 2. P. 584–603.

236. *Martin M.P., Piomelli U., Candler G.V.* Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2000. V. 13, No. 5. P. 361–376.

237. *Mason P.J., Thomson D.J.* Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. 1992. V. 242. P. 51–78.

238. *Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.P., Sergent E.* Assessment of the vortex method for Large Eddy Simulation inlet conditions // Progress in Computational Fluid Dynamics. 2006. V. 6, No. 1–3. P. 58–67.

239. *Meinke M., Schroder W., Krause E., Rister Th.* A comparison of second- and sixth-order methods for large-eddy simulations // Computers and Fluids. 2002. V. 31, No. 4–7. P. 695–718.

240. *Meneveau C., Lund T.* The dynamic Smagorinsky model and scale dependent coefficients in the viscous range of turbulence // Physics of Fluids. 1997. V. 9, No. 12. P. 3932–3934.

241. *Meneveau C., Lund T., Cabot W.* A Lagrangian dynamic sub-grid scale model of turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 1996. V. 319. P. 353–385.

242. *Mittal R.* Large-eddy simulation of flow past a circular cylinder. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1995. — P. 107–116.

243. *Miyake Y., Kajishima T.* Explanation of the origin of the secondary flow in a straight square duct on the basis of LES // Separated Flows and Jets. — Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. — P. 149–152.

244. *Moin P., Mahesh K.* Direct numerical simulation. A tool in turbulence research // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. V. 30. P. 539–578.

245. *Moin P., Squires K.D., Cabot W.H., Lee S.* A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport // Physics of Fluids. 1991. V. 3, No. 11. P. 2746–2757.

246. *Moinier P., Giles M.B.* Compressible Navier-Stokes equations for low Mach number applications // Proceedings of ECCOMAS CFD Conference, Swansea, United Kingdom, 4–7 September 2001. — 14 p.

247. *Moinier P., Giles M.B.* Stability analysis of preconditioned approximations of the Euler equations on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2002. V. 178, No. 2. P. 498–519.

248. *Morgan K., Perire J., Peiro J., Hassan O.* The computation of three dimensional flows using unstructured grids // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. V. 87, No. 3. P. 335–352.

249. *Morinishi Y., Kobayashi T.* Large eddy simulation of complex flow fields // Computers and Fluids. 1991. V. 19, No. 3–4. P. 335–346.

250. *Morinishi Y., Vasilyev O.V.* Subgrid scale modeling taking the numerical error into consideration. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1998. — P. 237–253.

251. *Morinishi Y., Vasilyev O. V.* Vector level identity for dynamic subgrid scale modeling in large eddy simulation // Physics of Fluids. 2002. V. 14, No. 10. P. 3616–3623.

252. *Moser R. D., Kim J., Mansour N. N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Physics of Fluids. 1999. V. 11, No. 4. P. 943–945.

253. *Müller J.-D.* Coarsening 3-D hybrid meshes for multigrid methods // Proceedings of the 9th Copper Mountain Multigrid Conference, Colorado, USA, 11–16 April 1999. — 12 p.

254. *Murakami S., Mochida A.* On turbulent vortex shedding flow past 2D square cylinder predicted by CFD // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1995. V. 54–55. P. 191–211.

255. *Murray J. A., Piomelli U., Wallace J. M.* Spatial and temporal filtering of experimental data for a priori studies of subgrid-scale stresses // Physics of Fluids. 1996. V. 8, No. 7. P. 1978–1980.

256. *Nicoud F., Ducros F.* Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 62, No. 3. P. 183–200.

257. *Nikitin N. V., Nicoud F., Wasistho B., Squires K. D., Spalart P. R.* An approach to wall modeling in large-eddy simulations // Physics Fluids. 2000. V. 12, No. 7. P. 1629–1632.

258. *Normand X., Lesieur M.* Direct and large-eddy simulation of laminar breakdown in high-speed axisymmetric boundary layers // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1992. V. 3, No. 5. P. 231–252.

259. *Ong L., Wallace J.* The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder // Experiments in Fluids. 1996. V. 20, No. 6. P. 441–453.

260. *O'Sullivan P. L., Biringen S., Huser A.* A priori evaluation of dynamic subgrid models of turbulence in square duct flow // Journal of Engineering Mathematics. 2001. V. 40, No. 1. P. 91–108.

261. *Panchapakesan N. R., Lumley J. L.* Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium // Journal of Fluid Mechanics. 1993. V. 246. P. 197–223.

262. *Papamoschou D., Roshko A.* The compressible turbulent shear layer: an experimental study // Journal of Fluid Mechanics. 1988. V. 197. P. 453–477.

263. *Park T. S., Sung H. J.* Development of a near-wall turbulence model and application to jet impingement heat transfer // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2001. V. 22, No. 1. P. 10–18.

264. *Paschkewitz J. S.* A preliminary investigation of large eddy simulation (LES) of the flow around a cylinder at $Re_D = 3900$ using a commercial CFD code. — Lawrence Livermore National Laboratory. Report No. UCRL-TR-219145. — 2006.

265. *Peng S.-H., Davidson L.* On a subgrid-scale heat flux model for large eddy simulation of turbulent thermal flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2002. V. 45, No. 7. P. 1396–1405.

266. *Pietri L., Amielh M., Anselmet F.* Simultaneous measurements of temperature and velocity fluctuations in a slightly heated jet combining a cold wire and laser Doppler anemometry // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21, No. 1. P. 22–36.

267. *Piomelli U.* Large-eddy and direct simulation of turbulent flows // Invited short course delivered at the 9th Annual Conference of the CFD Society of Canada, Kitchener, Canada, May 2001. — 70 p.

268. *Piomelli U.* Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences. 1999. V. 35, No. 4. P. 335–362.

269. *Piomelli U., Balaras E.* Wall layer models for large eddy simulation // Annual Review of Fluid Mechanics. 2002. V. 34. P. 349–374.

270. *Piomelli U., Balaras E., Pasinato H., Squires K.D., Spalart P.R.* The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. V. 24, No. 4. P. 538–550.

271. *Piomelli U., Yu Y., Adrian R.J.* Subgrid-scale energy transfer and near wall turbulence structure // Physics of Fluids. 1996. V. 8, No. 1. P. 215–224.

272. *Porte-Agel F., Meneveau C., Parlange M.B.* A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. 2000. V. 415. P. 261–284.

273. *Rider W.J., Margolin L.* From numerical analysis to implicit subgrid turbulence modelling. — AIAA Paper. No. 2003-4101. — 8 p.

274. *Rizetta D.P., Visbal M.R., Gaitonde D.V.* Direct simulation and large-eddy simulation of supersonic flows by a high-order method. — AIAA Paper. No. 2000-2406. — 12 p.

275. *Rodi W.* DNS and LES of some engineering flows // Fluid Dynamics Research. 2006. V. 38, No. 2–3. P. 145–173.

276. *Rodi W.* Simulation of turbulence in practical flow calculations // Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Spain, 11–14 September 2000. — 22 p.

277. *Rodi W., Ferziger J.H., Breuer M., Pourquie M.* Status of large eddy simulation: results of a workshop. Workshop on LES of flows past bluff bodies, Tegernsee, Germany, 26–28 June 1995 // Journal of Fluids Engineering. 1995. V. 198, No. 2. P. 248–262.

278. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // Journal of Computational Physics. 1981. V. 43, No. 2. P. 357–372.

279. *Sagaut P.* Numerical simulations of separated flows with subgrid model // La Recherche Aerospatiale. 1996. V. 1. P. 51–63.

280. *Sagaut P., Troff B., Le T.H., Ta P.L.* Large eddy simulation of turbulent flow past a backward facing step with a new mixed scale SGS model // Notes on Numerical Fluid Mechanics. 1996. V. 53. P. 271–278.

281. *Salinas-Vazquez M., Metais M.* Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct // Journal of Fluid Mechanics. 2002. V. 453. P. 201–238.

282. *Salinas-Vazquez M., Vicente W., Espinosa A., Barrios E.* Large eddy simulation of an ammonia jet // American Journal of Applied Sciences. 2005. V. 2, No. 8. P. 1270–1273.

283. *Salvetti M.V., Banerjee S.* A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulation // Physics of Fluids. 1995. V. 7, No. 11. P. 2831–2847.

284. *Schlatter P., Stolz S., Kleiser L.* LES of transitional flows using the approximate deconvolution model // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2004. V. 25, No. 3. P. 549–558.

285. *Schmidt St., Thiele F.* Comparison of numerical methods applied to the flow over wall-mounted cubes // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2002. V. 23, No. 3. P. 330–339.

286. *Schoppa W., Hussain F.* Effective drag reduction by large-scale manipulation of streamwise vortices in near-wall turbulence. — AIAA Paper. No. 97-1794. — 9 p.

287. *Schumann U.* Subgrid-scale model for finite difference simulation of turbulent flows in plane channels and annuli // Journal of Computational Physics. 1975. V. 18, No. 4. P. 376–404.

288. *Scotti A., Meneveau C.* A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow // Physica D. 1999. V. 127, No. 3–4. P. 198–232.

289. *Scotti A., Meneveau C., Lilly D.K.* Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids // Physics of Fluids. 1993. V. 5, No. 9. P. 2306–2308.

290. *Scotti A., Meneveau C., Fatica M.* Dynamic Smagorinsky model on anisotropic grids // Physics of Fluids. 1997. V. 9, No. 6. P. 1856–1858.

291. *Shah K.B., Ferziger J.H.* A new non-eddy viscosity subgrid-scale model and its application to channel flow. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1995. — P. 73–90.

292. *Shen S., Ding F., Han J., Lin Y.-L., Arya S.P., Proctor F.H.* Numerical modeling studies of wake vortices: real case simulation. — AIAA Paper. No. 99-0755. — 16 p.

293. *Shur M., Spalart P.R., Squires K.D., Strelets M., Travin A.* Three dimensionality in Reynolds-averaged Navier–Stokes solutions around two-dimensional geometries // AIAA Journal. 2005. V. 43, No. 6. P. 1230–1242.

294. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K.* Navier–Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate // Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference, Paris, France, 9–13 September 1996. — Chichester: John Wiley & Sons, 1996. — P. 676–682.

295. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K.* Towards the prediction of noise from jet engines // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. V. 24, No. 4. P. 551–561.

296. *Silvestrini J.H., Lamballais E., Lesieur M.* Spectral-dynamic model for LES of free and wall shear flows // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1998. V. 19, No. 5. P. 492–504.

297. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review. 1963. V. 91, No. 3. P. 99–165.

298. *Smirnov A., Shi S., Celik I.* Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling // Journal of Fluids Engineering. 2001. V. 123, No. 2. P. 359–371.

299. *Spalart P.R.* Strategies for turbulence modelling and simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21, No. 3. P. 252–263.

300. *Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M., Allmaras S.R.* Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // Proceedings

of the 1st AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana, 4–8 August 1997. — Louisiana Technical University, 1997. — P. 137–148.

301. *Speziale C.G., Erlebacher G., Zang T.A., Hussaini M.Y.* The subgrid-scale modeling of compressible turbulence // Physics of Fluids. 1988. V. 31, No. 4. P. 940–942.
302. *Stanley S., Sarkar S.* Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1997. V. 9, No. 2. P. 121–147.
303. *Stefano G., Goldstein D.E., Vasilyev O.V.* On the role of subgrid-scale coherent modes in large-eddy simulation // Journal of Fluid Mechanics. 2005. V. 525. P. 263–274.
304. *Stolz S., Adams N.A., Kleiser L.* An approximate deconvolution model for LES of compressible flows and its application to shock–turbulence interaction // Physics of Fluids. 2001. V. 13, No. 10. P. 2985–3001.
305. *Stolz S., Schlatter P., Kleiser L.* High-pass filtered eddy viscosity models for large-eddy simulations of transitional and turbulent flow // Physics of Fluids. 2005. V. 17, No. 6. 065103 (14 pages).
306. *Strelets M.* Detached eddy simulation of massively separated flows. — AIAA Paper. No. 2001-0879. — 18 p.
307. *Su M.D., Friedrich R.* Investigation of fully developed turbulent flow in a straight duct with large eddy simulation // Journal of Fluids Engineering. 1994. V. 116, No. 4. P. 677–684.
308. *Suksangpanomrung A., Djilali N., Moinat P.* Large-eddy simulation of separated flow over a bluff rectangular plate // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21, No. 5. P. 655–663.
309. *Sutton G.W.* Aero-optical foundations and applications // AIAA Journal. 1985. V. 23, No. 10. P. 1525–1537.
310. *Sutton G.W.* Effect of inhomogeneous turbulence on imaging through turbulent layers // Applied Optics. 1994. V. 33, No. 18. P. 3972–3976.
311. *Taniguchi N.* Dynamic SGS model by finite difference method // Journal of Institute of Industrial Science, University of Tokyo. 1995. V. 47, No. 2. P. 42–45.
312. *Tejada-Martinez A.E., Jansen K.E.* A parameter-free dynamic subgrid-scale model for large-eddy simulation // Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering. 2006. V. 195, No. 23–24. P. 2919–2938.
313. *Temmerman L., Hadziadbic M., Leschziner M., Hanjalic K.* A hybrid two-layer URANS–LES approach for large eddy simulation at high Reynolds numbers // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2005. V. 26, No. 2. P. 173–190.
314. *Temmerman L., Leschziner M.A., Mellen C.P., Frohlich J.* Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. V. 24, No. 2. P. 157–180.
315. *Tenaud C., Pellerin S., Dulieu A., Ta Phuoc L.* Large eddy simulations of a spatially developing incompressible 3D mixing layer using the v–ω formulation // Computers and Fluids. 2005. V. 34, No. 1. P. 67–96.

316. *Thomas T.G., Williams J.J.R.* Development of a parallel code to simulate skewed flow over a bluff body // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. V. 67–68. P. 155–167.
317. *Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P.R.* Detached-eddy simulation past a circular cylinder // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 63, No. 1–4. P. 293–313.
318. *Tromeur E., Garnier E., Sagaut P.* Analysis of the Sutton model for aero-optical properties of compressible boundary layers // Journal of Fluids Engineering. 2006. V. 128, No. 2. P. 239–246.
319. *Truman C.R.* The influence of turbulent structure on optical phase distorsion through turbulent shear flow. — AIAA Paper. No. 92-2817. — 12 p.
320. *Tsubokura M., Kobayashi T., Taniguchi N., Jones W.P.* A numerical study on the eddy structures of impinging jets excited at the inlet // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. V. 24, No. 4. P. 500–511.
321. *Tucker P.G.* Novel MILES computations for jet flows and noise // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2004. V. 25, No. 4. P. 625–635.
322. *Tucker P.G., Davidson L.* Zonal k–l based large eddy simulations // Computers and Fluids. 2004. V. 33, No. 2. P. 267–287.
323. *Tucker P.G., Pan Z.* URANS computations for a complex internal isothermal flow // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. V. 190, No. 22–23. P. 2893–2907.
324. Turbulent reacting flows / Edited by P. A. Libby, F. A. Williams. — Academic Press, 1994. — 648 p.
325. *Vasilyev O.V., Lund T.S.* A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. — Center for Turbulence Research. Stanford University, 1997. — P. 67–82.
326. *Vasilyev O.V., Lund T.S., Moin P.* A general class of commutative filters for LES in complex geometries // Journal of Computational Physics. 1998. V. 146, No. 1. P. 105–123.
327. *Verzicco R., Mohd-Yusof J., Orlandi P., Haworth D.* Large eddy simulation in complex geometric configurations using boundary body forces // AIAA Journal. 2000. V. 38, No. 3. P. 427–433.
328. *Vieser W., Esch T., Menter F.* Heat transfer predictions using advanced two-equation turbulence models. — CFX Validation Report. No. CFX-VAL10/0602. — 2002. — 52 p.
329. *Voke P.R., Gao S.* Numerical study of heat transfer from an impinging jet // International Journal of Hear and Mass Transfer. 1998. V. 41, No. 5. P. 671–680.
330. *Vreman A.W.* The filtering analog of the variational multiscale method in large-eddy simulation // Physics of Fluids. 2003. V. 15, No. 8. P. L61–L64.
331. *Vreman A.W., Geurts B.J., Kuerten J.G.M.* On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model // Physics of Fluids. 1994. V. 6, No. 12. P. 4057–4059.
332. *Vreman B., Geurts B., Kuerten H.* A priori tests of large eddy simulation of the compressible mixing layer // Journal of Engineering Mathematics. 1995. V. 29, No. 4. P. 299–327.
333. *Vreman B., Geurts B., Kuerten H.* Subgrid-modelling in LES of compressible flow // Applied Scientific Research. 1995. V. 54, No. 3. P. 191–203.

334. *Vreman A. W., Sandham N. D., Luo K. H.* Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics // Journal of Fluid Mechanics. 1996. V. 320. P. 235–258.

335. *Vuillot F., Lupoglazoff N.* Combustion and turbulent flow effects in 2D unsteady Navier–Stokes simulations of oscillatory solid rocket motors. — AIAA Paper. No. 96-0884. — 15 p.

336. *Wang S. J., Mujumdar A. S.* A comparative study of five low Reynolds number k–ε models for impingement heat transfer // Applied Thermal Engineering. 2005. V. 25, No. 1. P. 31–44.

337. *Wei H., Chen C. P.* A nonequilibrium algebraic model for turbulent density fluctuations // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39, No. 18. P. 3989–3991.

338. *Werner H., Wengle H.* Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel // Proceedings of the 8th Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, 9–11 September 1993. — Berlin: Springer Verlag, 1993.

339. *Willems W., Peters N.* Large eddy simulation of a turbulent mixing layer using a new two-level turbulence model // Proceedings of the 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France, September 1997. — 12 p.

340. *Wilson R. V., Demuren A. O.* Two-dimensional spatially developing mixing layers // Numerical Heat Transfer. 1996. V. 29. P. 485–509.

341. *Wu X., Squires K. D.* Large Eddy Simulation of an equilibrium three-dimensional boundary layer // AIAA Journal. 1997. V. 35, No. 1. P. 67–74.

342. *Wu X., Squires K. D.* Numerical Investigation of the turbulent boundary layer over a bump // Journal of Fluid Mechanics. 1998. V. 362. P. 229–271.

343. *Xia H., Qin N.* Detached-eddy simulation for synthetic jets with moving boundaries // Modern Physics Letters. Series B. 2005. V. 19, No. 28–29. P. 1429.

344. *Yakhot A., Orszag S. A., Yakhot V., Israeli M.* Renormalization group formulation of large-eddy simulation // Journal of Scientific Computing. 1986. V. 1, No. 1. P. 1–51.

345. *Yan H., Su M.* Application and comparison of two sgs models in large eddy simulation of free turbulent jet flow // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 1999. V. 4, No. 1. P. 12–19.

346. *Yoshizawa A., Horiuti K.* A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the largeeddy simulation of turbulent flows // Journal of Physical Society of Japan. 1985. V. 54, No. 8. P. 2834–2839.

347. *Yoshizawa A.* Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling // Physics of Fluids. 1986. V. 29, No. 7. P. 2152–2164.

348. *Yoshizawa A., Kobayashi K., Kobayashi T., Taniguchi N.* A non-equilibrium fixed-parameter subgrid-scale model obeying the near-wall asymptotic constraint // Physics of Fluids. 2000. V. 12, No. 9. P. 2338–2344.

349. *Yu D., Kareem D. A.* Numerical simulation of flow around rectangular prism // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. V. 67–68. P. 195–208.

350. *Zang T.A., Dahlburg R.B., Dahlburg J.P.* Direct and large-eddy simulations of three-dimensional compressible Navier–Stokes turbulence // Physics of Fluids. 1992. V. 4, No. 1. P. 127–140.
351. *Zang Y., Street R.L., Koseff J.R.* A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows // Physics of Fluids. 1993. V. 5, No. 12. P. 3186–3196.
352. *Zdravkovich M.M.* Flow around circular cylinders. — Oxford: Oxford University Press, 1997.
353. *Zhou L.X., Li L., Li R.X., Zhang J.* Simulation of 3D gas-particle flows and coal combustion in a tangentially fired furnace using a two-fluid-trajectory model // Powder Technology. 2002. V. 125, No. 2–3. P. 226–223.

Предметный указатель

Бафтинг 63

Белый шум 91, 92, 244, 245, 284, 286, 308

Берстинг 21

Библиотека
— ADF 214
— CGNS 214
— — LFS 214
— MPI 210, 211, 215, 264
— OPlus 214, 215, 264
— VISUAL 3 214

Векторизация 198, 208

Гипервязкость 166

Гипотеза
— Буссинеска 29, 30, 48, 123, 149, 180, 181
— Кармана 33
— Клаузера 34
— Колмогорова 25, 73, 89, 323
— Колмогорова–Прандтля 38
— Невзглядова–Драйдена 38
— Прандтля 31
— Тэйлора 61, 247, 283
— локальности 30, 31, 37
— подобных масштабов 124, 141, 153, 156
— эргодическая 99

Градиент 196, 232
— в серединной точке грани 231
— — модифицированный 232
— в узле сетки 227, 232, 243

Граничные условия 18, 49, 53, 64, 67, 72, 77, 81, 172, 195, 198, 199, 201, 202, 211, 254, 270, 292, 298
— входные 202, 217, 243, 249, 283, 284, 293, 299, 307
— — нестационарные 91, 244, 245, 282, 284, 286, 290, 308
— — синтетические 246
— выходные 202, 217, 250, 284, 308
— — мягкие 202, 250
— — неотражающие 202, 250, 265, 272, 284, 293, 308
— на стенке 20, 40, 202, 217, 250, 251, 253, 256, 265, 272, 307
— — Неймана 161
— — жесткие 202, 256
— — непротекания 217, 225, 230, 250, 256, 265, 307
— — нормального вдува 272
— — прилипания 217, 230, 250, 256, 265, 276, 307
— — слабые 202, 256, 258
— нестационарные 64, 91, 243
— периодические 161, 187, 190, 203, 219, 244, 252, 265, 272, 283, 284, 286
— симметрии 274
— удаленные 202, 244, 284, 293, 307

Декомпозиция
— расчетной области 210

Дискретизация 70, 78, 92, 102, 106, 125, 144, 146, 161, 166, 171, 175, 177, 194, 196, 201, 203, 208, 217, 218, 228, 251, 256
— диффузионных потоков 85, 173, 186, 194, 204, 206, 217, 219, 230
— источниковых членов 217
— конвективных потоков 79–81, 85, 91, 173, 186, 194, 204–206, 217, 219, 222, 256, 257

— ошибка 78
— по времени 69, 70, 85, 194, 204, 232
— по пространству 204
— производных 78, 102
Диссипация 19, 21–23, 25, 38, 42, 52, 59, 80, 82, 116, 149, 151, 153, 182, 184, 234, 239, 241, 245, 249
— подсеточная 76, 80, 81, 115, 123, 124, 129, 130, 134, 151–153, 155, 157, 170, 181, 292
— — обратная 76, 78, 91, 124, 130, 139, 153, 205
— — прямая 76, 130
— схемная 64, 77, 79, 80, 85, 91, 228, 234
Диффузия 20, 27, 111, 181, 182, 185
— многокомпонентная 111
— подсеточная 76, 114, 130, 181, 182, 185
— схемная 48, 49, 79, 91

Задача Римана 205, 206, 229
Закон
— Био–Савара 93, 245, 246
— Гладстоуна–Дейла 320
— Колмогорова–Обухова 26, 58, 60, 64, 65, 126, 165, 167, 273
— Ньютона 110
— Рейхардта 267
— Сазерледна 120
— Фика 111, 180
— Фурье 29, 110, 180
— следа 34, 252
— стенки 28, 33, 39, 253, 254, 257–260
— — обобщенный 33

Коммутативность 78, 80, 93, 103, 107, 109, 142, 174, 178, 242
Контрольный объем 73, 90, 102, 107, 196, 203, 205, 206, 217–224, 227–229, 231, 239, 241, 242, 256, 257, 260, 308
— пристеночный 40, 218, 254, 256–260, 306
— расширенный 227
— совпадающий с ячейкой 218
— среднемедианный 196, 219
— центрированный относительно узла 218

Макротемпература 117
Масштаб
— времени 100, 157, 246, 248, 323
— длины 20, 34, 38, 41, 56, 92, 129, 247, 248
— колмогоровский 22, 25, 26, 56, 67, 79, 147, 266, 294
— подсеточный 51
— скорости 20, 34, 41, 129, 185
— турбулентности 32, 39, 41, 45, 49, 52, 55, 82, 84, 243, 253, 304, 305
— — диссипации 56, 60, 69, 90, 93
— — интегральный 38, 39, 81, 88, 140, 322
— тэйлоровский 56, 69, 286, 294
Метод
— ADM 175, 177, 178, 188
— — RT 178
— CES 88
— CSC 88
— CVS 92, 93
— Delayed DES 84
— DES 86, 93
— ECM 238
— Hybrid LES/RANS 85, 89–91, 93, 241
— ILES 79, 91
— LBM 194
— LNS 88, 93
— MILES 64, 79–81, 91, 92, 228, 292
— PDNS 64, 79
— PISO 190
— PPM 206
— RANS 64
— Resolved LES 75
— SAS 86
— SDS 88
— SEM 246
— TTRANS 86
— VLES 65, 88, 93, 100
— VPA 173
— ZLES 89
— Кармана–Польгаузена 283

— Монте-Карло 179
— Ньютона 254–256, 258
— вихрей 245
— декомпозиции скорости 173
— динамической реконструкции 175
— исключения Гаусса 208
— итерационный 199, 207, 208
— — Гаусса–Зейделя 208, 215
— — Якоби 208
— — с предобусловливанием 208
— комбинированный 81, 85
— конечных объемов 73, 79, 102, 175, 194, 198, 200, 201, 203, 204, 217, 218, 222
— конечных разностей 79, 175, 194, 198, 203, 204
— конечных элементов 200, 201, 203, 256
— маршевый 92, 198, 199
— многосеточный 208, 235
— — реализация 237
— наименьших квадратов 138, 142, 144, 159, 160
— пристеночных функций 28, 39, 45, 202, 251, 253, 257, 258, 261, 305
— — Лаундера–Сполдинга 305
— — Чиенга–Лаундера 306
— — реализация 254
— псевдоспектральный 69, 203
— расщепления 198
— релаксации 139, 236, 305
— случайных возмущений 245, 293, 308
— спектральный 50, 69, 70, 78, 106, 166, 167, 175, 203, 204
— схлопывающихся граней 208, 238
— схлопывающихся узлов 208
— функции плотности вероятности 179
— — FDF 179
— — FMDF 179
— — VFDF 179, 189
— явной фильтрации и реконструкции 125, 142, 173, 175

Моделирование крупных вихрей 50–51, 62, 63, 72–79, 81, 93, 122, 179, 190, 194, 201, 241, 242, 291, 307, 327
— неявное 79

Моделирование отсоединенных вихрей 52, 62, 64, 81–85, 91, 241, 259
— GIS 83

Модель
— ν_t-92 45
— k-ω 44–46, 48, 49, 82, 306
— k-ε 39–46, 48, 49, 82, 149, 269, 271, 283, 291, 295, 305
— — Realizable 43, 44, 48, 82
— — RNG 43, 49
— — высокорейнольдсовая 38, 40, 43
— — низкорейнольдсовая 39, 40, 43, 260, 306
— k-ε-$\langle T'^2 \rangle$ 291
— k-ε-f_μ 306
— k-l 44, 89, 92
— v^2-f 46, 271, 306
— HPF 152
— LRR 47
— RNG 134–135, 265, 266, 269, 282, 286, 303
— WALE 133, 134
— Болдуина–Ломакса 35
— Ван Дриста 33, 127, 128, 133, 266, 267
— Джонсона–Кинга 35
— Кокли 323
— Ментера 45, 46, 52, 81, 82, 190, 306
— Прандтля 32, 33, 35, 37, 41, 51, 125, 254, 259, 260, 291, 323
— Секундова 45
— Смагоринского 51, 52, 81, 82, 117, 123, 125–135, 137, 139, 145, 148, 151–153, 156, 162, 167, 179, 183, 186–188, 190, 241, 242, 265–267, 282, 286, 291
— — обобщенная 183
— — с ограничением 130
— — с учетом предыстории течения 129
— Смагоринского–Лилли 127
— Спаларта–Аллмараса 45, 48, 52, 81, 82, 239, 241, 242, 260

— — источниковый член 239
— — модифицированная 239
— алгебраическая 31, 35, 180
— — двухслойная 37
— вихревой вязкости 30, 123, 125, 136, 153, 155, 173, 179, 181
— — нелинейная 48, 153
— двухпараметрическая 39, 41, 44, 153, 180
— двухслойная 39, 41, 88, 259, 306
— динамическая 123, 130, 135, 137, 140, 142, 143, 146, 148, 152, 167, 170, 172, 175, 179, 180, 183, 185, 187, 188, 190, 265, 266, 282, 286, 291
— — Германо 137, 146, 160
— — без вторичной фильтрации 142
— — векторная 145, 146
— — лагранжевая 143, 144, 147, 148, 161
— — локальная 145
— — модифицированная 141
— дифференциальная 37, 51, 82, 89, 123, 149, 151, 180
— — динамическая 150
— масштабно-зависимая 147
— масштабно-инвариантная 146
— многопараметрическая 46
— однопараметрическая 45, 149, 265, 266, 282, 286
— переноса рейнольдсовых напряжений 46, 49, 283, 291
— — алгебраическая 36
— подобных масштабов 78, 81, 91, 124, 153, 155, 156, 169, 175, 177, 185, 291
— — динамическая 185
— — нелинейная 154
— подсеточная 50, 64, 73, 76, 79, 102, 114, 121–123
— — классификация 73, 122
— с обращением свертки 124, 168, 169
— смешанная 78, 91, 116, 124, 155, 183, 184
— — LDMMS 160
— — MTSM 158
— — высокого порядка 165
— — динамическая 124, 158, 159
— — нелинейная 159, 162
— — обобщенная 175
— — с ограничением 156
— спектральная 166, 167, 177
— — динамическая 167
— — многомасштабная 152, 167
— структурной функции 123, 131, 133, 167, 271, 291
— — с ограничением 131
— — с фильтрацией 131
— турбулентности 22, 27, 28, 31, 47–49, 56, 63, 71, 72, 86, 97, 101
— — классификация 31
— фрактальная 179

Начальные условия 53, 67, 161, 172, 202, 211, 243, 265, 272, 283, 293, 307
— нестационарные 202, 243
— стационарные 202

Невязка 81, 124, 217–219, 222, 230, 231, 236–238, 256, 257

Неустойчивость
— течения 19, 23, 244, 313
— — Кельвина–Гельмгольца 295, 309
— численная 49, 76, 78, 84, 108, 118, 131, 139, 144, 148, 151, 223

Обтекание
— пластины 28
— призмы 85, 87
— профиля 28, 54, 77, 85, 87, 194
— решетки профилей 85
— сферы 17, 88
— цилиндра 85, 87, 158, 186, 190–192, 194

Ограничитель 205, 222, 225
— minmod 230

Осреднение 21, 27, 29, 47, 63, 93, 94, 97–99, 102, 118, 139, 140, 144, 146, 192
— лагранжевое 143, 147, 160, 163
— локальное 138
— по Рейнольдсу 21, 39, 97, 98, 115, 116

— по Фавру 21, 99, 115, 118
— по времени 21, 63, 64, 86, 87, 98–100, 106, 261, 307, 310
— по объему 257
— по однородным направлениям 138, 139, 147, 160, 172
— по пространству 98, 131–133
— статистическое 27, 98, 100, 134, 261, 274

Параллелизация 196, 208–210, 264
Перемежаемость 29, 34, 35, 60, 252, 291
Пограничный слой 34, 52, 75, 135, 203, 270, 319
— внешняя область 34, 41, 69, 75, 251, 252, 258
— внутренняя область 28, 33, 34, 41, 68, 75, 251–253, 258, 260
— двухслойная схема 34, 37, 252
Поправка
— Ван Дриста 41
— Като–Лаундера 42, 46
— на анизотропность 157
— на вращение 46
— на кривизну линий тока 42, 46, 129, 303
— на сжимаемость 43
— на стратифицированность 43, 129
— на шероховатость 128
Постоянная
— Гладстоуна–Дейла 320
— Кармана 33, 127
— Клаузера 34
— Колмогорова 26, 58, 126
— Смагоринского 89, 126, 133, 135, 138–141, 143–148, 158–161, 179, 241
Прямое численное моделирование 49–50, 62, 67–71, 81, 93, 102, 115, 120, 130, 153, 161, 179, 181, 184, 201, 206, 261, 291, 307
Псевдолапласиан 196, 225–227, 232
— модифицированный 225, 226
Путь смешения 32, 35, 39, 45, 127, 259

Реламинаризация 47

Свертка 103, 104, 108, 136, 178
— обращение 169, 170, 173–175, 188
— — приближенное 169, 174–176, 188
Сглаживатель 225
Сетка 67, 78, 84, 105, 196, 214
— адаптивная 196, 201, 239
— блочная 199–200
— в пограничном слое 196, 201, 226
— вложенная 236, 238
— гибридная 201, 217
— неструктурированная 80, 140, 142, 194, 200–201, 204, 208, 214, 224, 241, 256
— подвижная 194
— структурированная 140, 196, 201, 208, 241, 260
— — алгебраическая 198
— — дифференциальная 198–199
— — конформная 198, 199
— — криволинейная 198
— — ортогональная 198, 199
Скорость
— в пограничном слое 28, 34, 257, 270
— вдува 269–275, 277, 278
— двойное разложение 102
— дефект 34
— деформации 23, 24, 30, 51, 129, 140
— динамическая 28, 34, 266, 271
— диссипации 25, 26, 38, 39, 43, 44, 48, 51, 55, 57, 60, 64, 67, 68, 88–90, 93, 94, 126, 140, 153, 279, 306
— диффузии 109, 111
— избыточная 285
— мгновенная 25, 113, 162, 163, 165
— пульсационная 25, 32, 69, 91, 113, 162, 163, 292
— серднерасходная 20
— среднемассовая 109, 250
— средняя 30–32, 61, 68, 69, 94, 113, 162, 164, 169, 187, 243, 245, 246, 254, 270, 290, 309
— тройное разложение 65, 100, 101

— угловая 119
— циркуляция 23
— эффективная 282–284
Совмещенность 79, 205
Спектр 26, 57, 58, 61, 62, 65, 73, 79, 93, 120, 126, 131, 136, 167, 173, 180, 262
— инерционный интервал 60, 65, 74, 123, 151
— интервал диссипации 59, 68, 73
— интервал энергии 58, 60, 73
Схема
— ALE 194
— CDS 78
— ENO 206
— MARS 190
— MUSCL 217, 222, 228
— QUICK 91
— SAS 228
— TVD 206, 228
— Адамса–Бэшворта 194
— Годунова 92, 205, 206
— Колгана 205, 230
— Кранка–Николсона 194
— Мак–Кормака 194
— Рунге–Кутты 70, 194, 204, 232
— — различного порядка 233
— Чакраварти–Ошера 217, 222, 228, 230
— Эйлера 144, 171, 172
— гибридная 85
— линейная 205
— нелинейная 205
— неявная 76, 194, 204
— низкого порядка 78
— повышенной разрешающей способности 205, 206
— полной аппроксимации 236
— противопоточная 80, 85, 91
— центрированная 84, 92, 206, 217, 222, 224
— явная 204
— явно-неявная 204

Тензор вращения 129, 141, 156, 186

Тензор метрический 198

Тензор напряжений 21, 110, 116, 182
— RSFS 174, 175, 177
— USFS 175
— вязкий 110, 112, 113, 116, 117, 119, 182
— леонардовый 81, 113, 114, 122, 138, 141, 156
— перекрестный 101, 113, 114, 122, 154, 156
— подсеточный 50, 81, 113, 114, 117, 122, 123, 125, 136–138, 141, 149, 150, 152, 154–156, 158, 159, 162–164, 169, 174, 179, 183
— — в α-форме 164
— рейнольдсовый 22, 29, 31, 36, 37, 46, 48, 101, 113, 122, 124, 138, 154, 243, 248, 280
Тензор скоростей деформаций 22, 29, 36, 48, 110, 112, 141, 156, 182
— инвариант 46, 125, 129, 186, 242
Теорема
— Биркгофа–Хинчина 99
— Бореля 104
— Гамильтона 134
— Гаусса–Остроградского 217
— Гельмгольца 92
— Годунова 205
— Кельвина 20, 92, 163
— Стокса 227, 228
— Хинчина 61
— о среднем 218, 220
Течение
— Куэтта 141
— автоколебательное 63
— в импактной струе 302–319
— в каверне 265
— в канале 31, 41, 51, 75, 83, 91, 94, 127, 130, 152, 158, 166, 186–188, 194, 228, 244, 249, 251, 260, 265–269
— в канале со вдувом 269–282
— в пограничном слое 31, 35, 37, 68, 75, 126, 131, 133, 152, 243, 244, 319, 325
— в слое смешения 22, 116, 118, 126, 179, 181, 186, 189, 282–290, 319, 325

— в струе 22, 31, 44, 92, 140, 243, 290–302, 327
— в трубе 20, 21, 26, 28, 30, 37, 68, 298
— в струе 319
— визуализация 53
— за обратным уступом 85, 158, 243, 244, 260
— за решеткой 26, 228, 249
— изотермическое 185
— каноническое 28, 186
— ламинарное 17, 20, 22
— неизотермическое 127
— со сдвигом 30, 35, 129, 133, 141, 244
— стратифицированное 129
— турбулентное 17, 19–22, 33
— — переход 20, 47
Тождество
— Германо 139, 147, 150, 159
Толщина
— вытеснения 34
— пограничного слоя 34, 56, 75, 253, 318, 322
— потери завихренности 285
— потери импульса 283, 285, 290, 293, 308
Турбулентность 17, 18, 20, 29, 30, 60
— изотропная 24–26, 28, 50, 56–58, 60, 70, 80, 123, 126–128, 131, 132, 134, 139, 157, 166, 181, 186
— каскадный механизм 23, 25, 28
— крупномасштабная 34, 46, 49, 51, 59, 61, 121
— мелкомасштабная 22, 24, 25, 34, 46, 51, 60, 72, 100, 121, 123
— методы описания 62–67
— однородная 24, 25, 28, 70, 80, 98, 123, 126, 128, 134, 139, 157, 166, 181, 186
— определение 18
— подсеточная 50
— пристенная 47
— проблема замыкания 27, 28
— растяжение вихрей 19, 20, 23, 24, 134, 318, 319
— свойства 19–20
— стационарная 55, 57, 61
— схема Брэдшоу 24

Уравнение
— Гамильтона–Якоби 92
— Колмогорова–Хопфа 26, 27
— Пуассона 145, 199
— Фредгольма 145
— состояния 109, 113, 115, 117, 118, 183, 184, 216, 323
Уравнения
— Максвелла 323
— Навье–Стокса
— — осредненные 141
— Навье–Стокса 19, 27, 29, 39, 49, 62, 67, 73, 80, 93, 97, 100, 106, 109, 118, 135, 141, 149, 163, 165–168, 175, 190, 193, 194, 196, 200–204, 208, 214, 217, 218, 235, 256, 292, 323
— — в α-форме 163–165
— — осредненные 31, 49, 63, 65, 71–72, 77, 93, 190, 217, 243, 253, 305, 319, 328
— — параболизованные 201
— — фильтрованные 64, 74, 102, 120, 121, 135, 164, 166, 177, 186, 259, 271
— Рейнольдса 21, 22, 52, 64, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 81–85, 87, 91, 94, 97, 191, 259, 323
— — замыкание 31, 46, 51, 52, 63, 71, 72
— — нестационарные 64, 72, 81, 85–88, 98, 119, 120
— — параболизованные 31
— — стационарные 72, 81, 86
— Фридмана–Келлера 27, 28
— Эйлера 193, 201
— сохранения 109, 112
— — в консервативных переменных 118, 216
— — осредненные по Рейнольдсу 115
— — осредненные по Фавру 116
— — фильтрованные 181
Условие
— CBC 205, 206

— TVD 205, 206, 229
— ULTIMATE 206
— Куранта–Фридрихса–Леви 204
— монотонности 205
— нормировки 103, 246
— положительности 204, 232
— устойчивости 76, 172
Устойчивость
— область 233
— радиус 233
— численная 69, 77, 79, 87, 97

Фильтр 78, 92, 108, 169, 248
— Фурье 50, 73, 104, 106, 166
— гауссовский 50, 73, 104, 106, 142, 156, 170, 173, 176
— дискретный 108, 128, 131, 139, 142, 158, 168
— коробочный 50, 73, 104–106, 176, 187
— обобщенный 50, 102
— сеточный 135, 139–141, 152, 154, 168, 172, 173
— тестовый 124, 128, 135, 139–142, 146, 158, 159, 170, 187
— ширина 50, 63, 66, 76, 77, 80, 82, 89, 93, 103, 106–108, 124–126, 129, 154, 168, 177, 241, 242
— — в пограничном слое 106
— — на неструктурированной сетке 107
Фильтрация 50, 73, 76, 102, 107, 108, 112, 115, 121, 122, 124, 135, 142, 154, 168, 172–175, 242, 249
— вторичная 128, 135, 138, 146, 154, 158, 162, 170
— неявная 94, 102, 109, 112, 168, 175
— явная 80, 103, 109, 125, 141, 168, 170, 175, 177, 292
Формула
— Буссинеска 29, 30
— Грина 227, 228, 243
— Кармана 33, 58, 80, 91
— Клаузера 34, 35
— Колмогорова–Прандтля 26, 39, 305
— Прандтля 32–35
— Смагоринского 127, 129, 130, 135, 151, 180
— обращения 104, 162, 170
Функции
— пристеночные 38, 40, 41, 43, 44, 53, 77, 135, 252–254, 256, 258
— — неравновесные 254
Функция
— sign 230
— Хевисайда 135
— весовая 143, 160
— демпфирующая 40, 90, 127–129, 152, 158, 240
— — Ван Дриста 33, 72, 127, 128, 133, 266
— корреляционная 62, 131, 245, 247, 248, 322
— — временная 61
— — пространственная 61, 62
— — пространственно-временная 55, 61
— переключатель 130, 132, 156, 157
— перехода 41, 46
— плотности вероятности 60, 93, 157, 179, 189
— растяжения 198, 286
— релаксационная 47
— структурная 2 го порядка 62, 131, 132, 172
— фазовая 322, 324, 328
— фильтрующая 103, 105, 106, 108, 109, 168, 169

Число
— Куранта 69, 96, 148, 206, 234
— Маха 116, 117, 244
— — подсеточное 183, 184, 186
— — турбулентное 43
— — эффективное 283, 285, 327
— Нуссельта 310
— — отклонение от среднего значения 310
— — среднее 310
— Прандтля 120, 231, 290
— — подсеточное 114, 120, 167, 180, 184
— — турбулентное 29, 43

— Рейнольдса 20, 69, 187, 266, 273, 285, 294, 303, 325, 327
— — критическое 21
— — локальное 41, 141
— — подсеточное 140
— — турбулентное 35, 68, 69, 90, 255
— Ричардсона 129
— — подсеточное 129
— — турбулентное 35
— Струхаля 293, 317
— Фруда 129
— Шмидта
— — подсеточное 180

Шаг
— по времени 69, 94, 95, 172, 190, 234, 235, 266, 273, 286, 294, 309
— по пространству 273, 294, 308

Якобиан 222, 223, 225, 231, 235–237

Научное издание

ВОЛКОВ Константин Николаевич
ЕМЕЛЬЯНОВ Владислав Николаевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Редактор *В.С. Ярунин*
Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 12.12.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 27,5. Тираж 100 экз.
Заказ № 294

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0920-8



Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90

В издательстве «Физматлит» вышли из печати следующие книги:

Мышкис А.Д.
Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы

Самарский А.А., Михайлов А.П.
Математическое моделирование

Сигал И.Х., Иванова А.П.
Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы

Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.
Курс методов оптимизации, 2-е изд.

Тыртышников Е.Е.
Матричный анализ и линейная алгебра

Горшков А.Г. и др.
Волны в сплошных средах

Каюмов О.Р.
Глобально управляемые механические системы

Орленко Л.П.
Физика взрыва и удара. Уч.пос.

Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.
Основы механики сплошной среды. Курс лекций

Стулов В.П.
Лекции по газовой динамике

Черняк В.Г.,Суетин П.Е.
Механика сплошных сред. Уч.пос. для ВУЗов

Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.
Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.
Справочник по дифф. ур. с частными производными первого порядка

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.
Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики

Полянин А.Д.
Справочник. Линейные уравнения математической физики.

Полянин А.Д., Зайцев. В.Ф.
Справочник. Нелинейные уравнения математической физики (точные решения)

Полянин А.Д., Манжиров А.В.
Справочник по интегральным уравнениям

Дразин Ф.
Введение в теорию гидродинамической устойчивости. Пер. с англ.

Кляцкин В.И.
Динамика стохастических систем

Крянев А.В., Лукин Г.В.
Математические методы обработки неопределенных данных

Формалев В.Д., Ревизников Д.Л.
Численные методы

Хренников А.Ю
Неархимедов анализ и его приложения

Худяев С.И.
Пороговые явления в нелинейных уравнениях

Чуличков А.И.
Математические модели нелинейной динамики

Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.
Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики

Ильичев А.Т.
Уединенные волны в моделях гидромеханики

Ильюшин А.А.
Труды. Т.3. Теория термовязкоупругости

Завалищин Д.С., Завалищин С.Т.
Динамическая оптимизация обтекания

Зайчик Л.И., Алипченков В.М.
Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости

Каюмов О.Р.
Глобально управляемые механические системы

Лунев В.В.
Течение реальных газов с большими скоростями

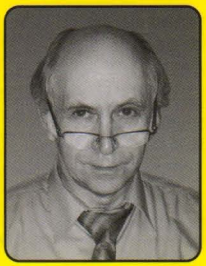
Нейланд В.Я. и др.
Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа

и другие книги

Наиболее полную информацию о книгах Вы можете найти в Интернете по адресу **http://www.fml.ru**

По вопросам приобретения книг обращаться:
Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
тел./факс (495) 334-7421, e-mail: fizmat@maik.ru





К.Н. ВОЛКОВ
доктор физико-математических наук, доцент кафедры плазмогазодинамики и теплотехники Балтийского государственного технического университета

В.Н. ЕМЕЛЬЯНОВ
профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой плазмогазодинамики и теплотехники Балтийского государственного технического университета

Моделирование крупных вихрей (Lange Eddy Simulation, LES) – перспективный подход к расчету турбулентных течений. В книге рассматривается применение LES к фильтрации уравнений Навье–Стокса и построению моделей подсеточной вязкости, а также вопросы численной реализации LES. Приводятся и обсуждаются результаты расчетов внутренних и струйных турбулентных течений.